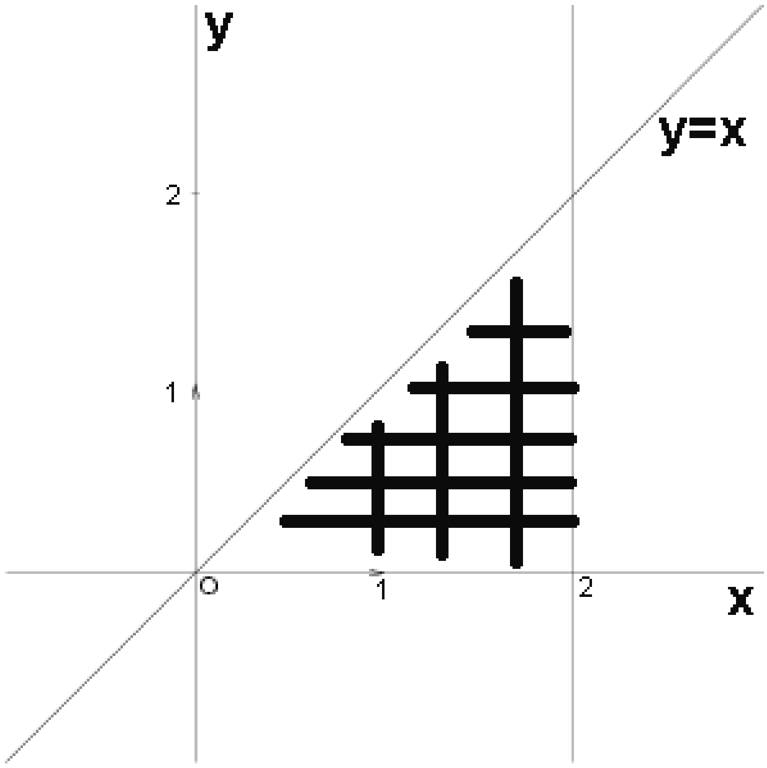
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ – ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2006
ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1

(α) Ουσιαστικά θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν που βρίσκεται μεταξύ των ευθειών $y = x$, xx' και $x = 2$, το οποίο ισούται με: $\frac{2\times 2}{2} = 2$.



Σχήμα 1: Το ζητούμενο εμβαδόν

(β) Έχουμε τα εξής:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^x c\,\mathrm{d}y = c\,x \qquad \text{για } 0 \le x \le 2 \\
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x = \int_y^2 c\,\mathrm{d}x = c\,(2-y) \qquad \text{για } 0 \le y \le 2
\end{aligned}
$$

Προφανώς, θα είναι: $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$ και συνεπώς οι τ.μ. X, Y δεν είναι ανεξάρτητες. Αυτό μπορούμε να το δείξουμε και ως εξής:

$$
f_{X|Y}(x \mid y=1) = \frac{f_{X,Y}(x, y=1)}{f_Y(y=1)} = \frac{c}{c} = 1 \qquad \text{για } 0 \le x \le 1
$$

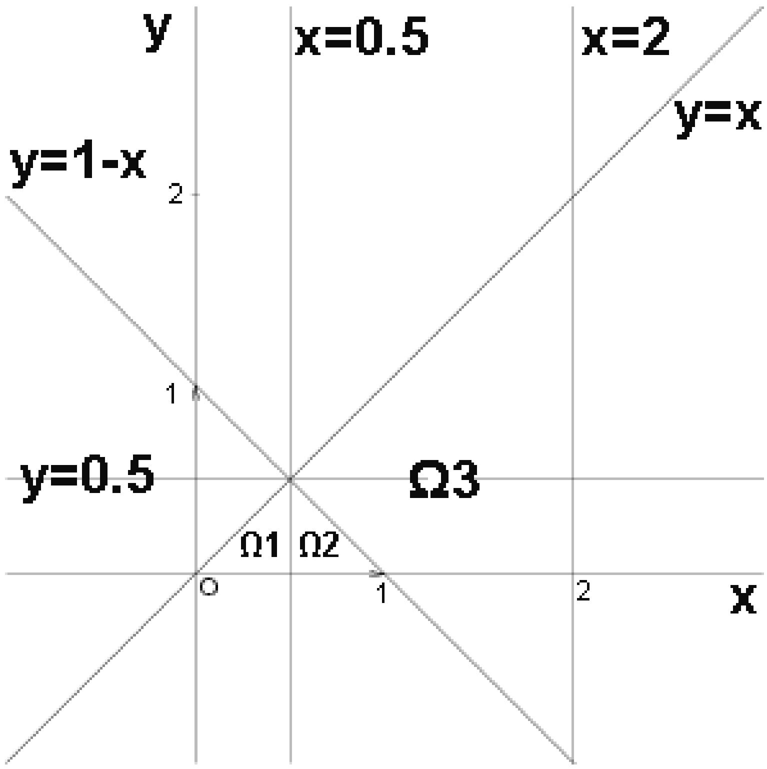
Επομένως, είναι: $f_{X|Y}(x \mid y=1) \neq f_X(x)$. Συνεπώς, οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.

(γ) Ο όγκος κάτω από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας πρέπει να ισούται με την μονάδα, οπότε θα είναι:

$$c \quad \frac{2\times 2}{2} = 2\,c = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{2}}$$

(δ) Στο σχήμα 2, οι περιοχές Ω_1 και Ω_2 περιγράφουν το γεγονός $B = \{Y < 1 - X\}$ ενώ οι περιοχές Ω_2 και Ω_3 αντιστοιχούν στο γεγονός $A = \{X \geq 0.5\}$. Επομένως, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} P(B \mid A) &= \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{c \cdot \text{εμβαδόν της } \Omega_2}{c \cdot \text{εμβαδόν των } (\Omega_2 \cap \Omega_3)} \\ &= \frac{\dfrac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)}{2}}{\dfrac{(2\cdot 2)}{2} - \dfrac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)}{2}} = \boxed{\frac{1}{15}} \end{aligned}$$

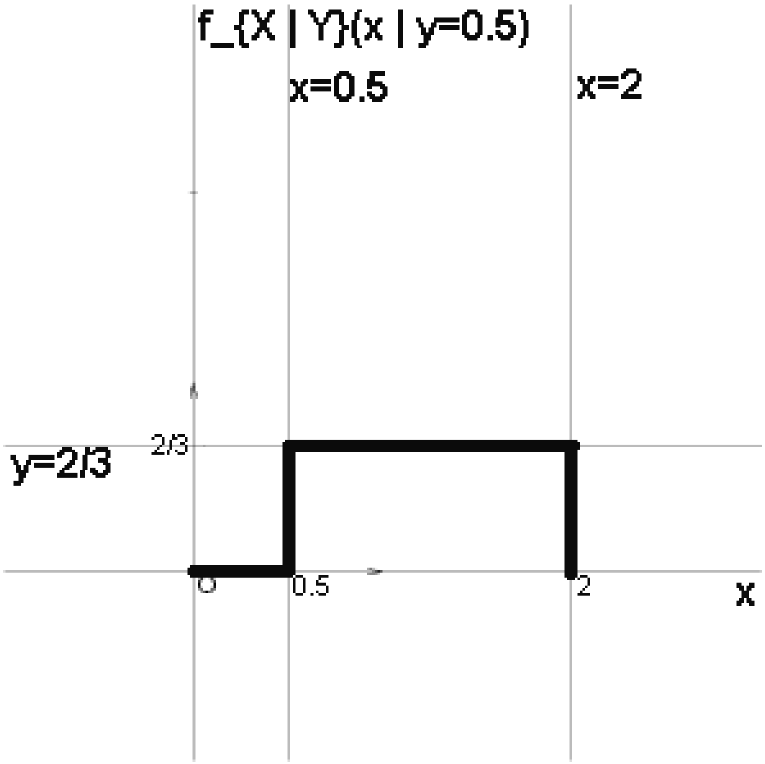


Σχήμα 2: Οι περιοχές Ω_1, Ω_2 και Ω_3

(ε) Από το (β) έχουμε ότι:

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x, y = 0.5)}{f_Y(y = 0.5)} = \frac{c}{c(2-0.5)} = \frac{2}{3}, \quad 0.5 \leq x \leq 2$$

Προκύπτει, λοιπόν, ότι δεδομένου του γεγονότος $Y = 0.5$, η X είναι ομοιόμορφη στο $[0.5, 2]$, όπως φαίνεται και από το σχήμα 3.



Σχήμα 3: Η γρ. παράσταση της $f_{X|Y}(x \mid y = 0.5)$

(στ) Σύμφωνα με το συμπέρασμα του ζητήματος (ε), θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E\left[X \mid Y = 0.5\right] &= \frac{2 + 0.5}{2} = \frac{5}{4} \\ E\left[X^2 \mid Y = 0.5\right] &= \frac{1}{3}\left(0.5^2 + 0.5 \times 2 + 2^2\right) = \frac{7}{4} \\ var\left(X \mid Y = 0.5\right) &= \frac{7}{4} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

(ζ) Είναι:

$$\begin{aligned} E\left[X\,Y\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,y \cdot f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2\int_y^2 x\,y \cdot \frac{1}{2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^2 \frac{1}{4} y\,\left(4 - y^2\right)\,\mathrm{d}y = 1 \end{aligned}$$

Θέμα 2

Ισχύει το εξής: $X \sim N\left(500, 25\right) \Rightarrow Z = \dfrac{X - 500}{5} \sim N\left(0, 1\right)$

(α) Έχουμε:

$$\begin{aligned} P\left(X \geq 490\right) &= P\left(\frac{X - 500}{5} \geq \frac{490 - 500}{5}\right) \\ &= P\left(Z \geq -2\right) = 1 - P\left(Z \leq -2\right) \\ &= 1 - \Phi\left(-2\right) = 0.9772 \end{aligned}$$

Επομένως, θα είναι:

$$P\left(1 \text{ από τα 3 πακέτα έχει βάρος} \geq 490\right) = \binom{3}{1} \left(0.9772\right)^1 \left(1-0.9772\right)^2 = \underline{0.001524}$$

(β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} P\left(490 \leq X \leq 505\right) &= P\left(\frac{490-500}{5} \leq \frac{X-500}{5} \leq \frac{505-500}{5}\right) \\ &= P\left(-2 \leq Z \leq 1\right) = \Phi\left(1\right) - \Phi\left(-2\right) \\ &= \Phi\left(1\right) + \Phi\left(2\right) - 1 \\ &= 0.8413 + 0.9772 - 1 = 0.8185 \end{aligned}$$

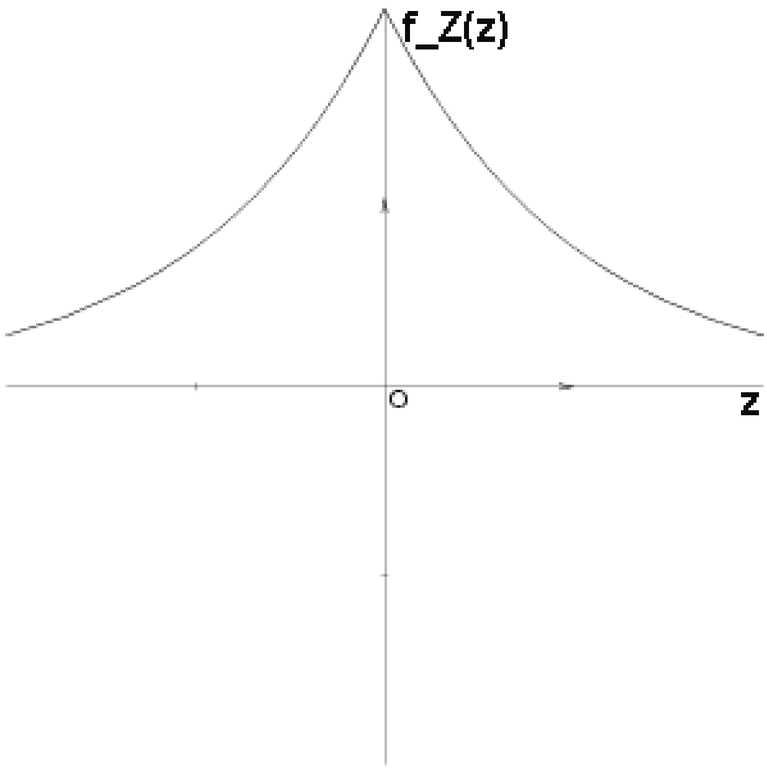
Επομένως, θα είναι:

$$P\left(\text{και τα 3 πακέτα είναι μεταξύ 490 και 505 gr}\right) = \left(0.8185\right)^3 = \underline{0.54837}$$

Θέμα 3

(α) Δεδομένου ότι $S = s$(με $s = -1, 0, 1$), έχουμε ότι η παρατήρησή μας στην έξοδο του καναλιού είναι: $Y = Z + s$. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι αν $Y = \alpha Z + b$, τότε: $f_Y(y) = \frac{1}{|\alpha|} f_Z\left(\frac{y-b}{\alpha}\right)$. Επομένως, για $\alpha = 1$ και $b = s$ θα έχουμε ότι:

$$f_{Y|S}(y \mid s) = f_Z(y-s) = \boxed{\frac{1}{2}\lambda\, e^{-\lambda\,|y-s|}\,, s = -1, 0, 1}$$



Σχήμα 4: Η γρ. παράσταση της $f_Z(z)$

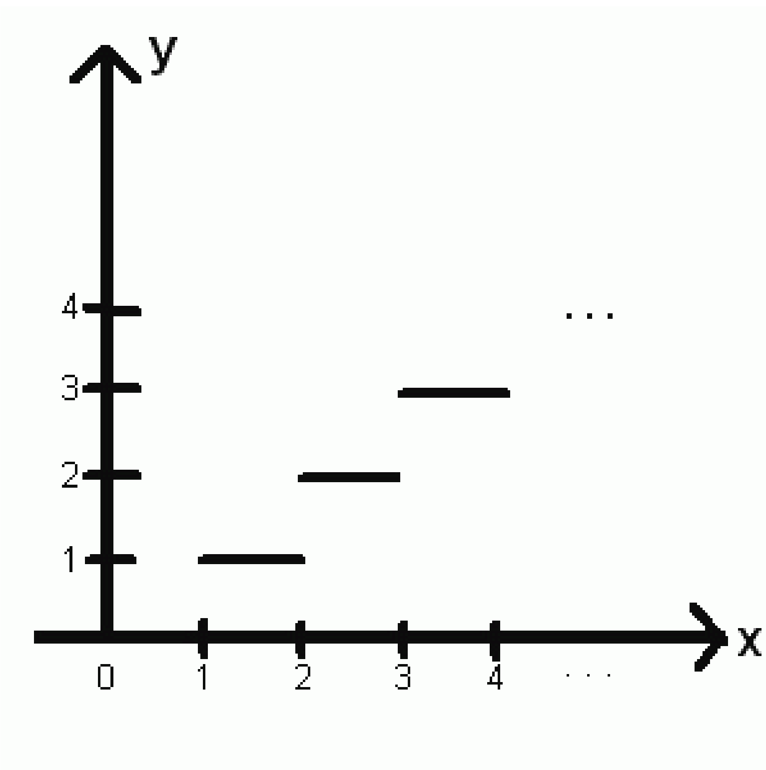
(β) Έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
P_e &= \sum_{s=\{-1,0,1\}} P\left(\text{σφάλμα} \,|\, \text{εστάλη το } s\right) \cdot P\left(\text{εστάλη το } s\right) \\
&= \frac{1}{3}\left[P\left(\text{σφάλμα} \,|\, \text{εστάλη το} \, 0\right) + P\left(\text{σφάλμα} \,|\, \text{εστάλη το } -1\right) + P\left(\text{σφάλμα} \,|\, \text{εστάλη το} \, 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\left(1 - P\left(-\frac{1}{2} \le Y \le \frac{1}{2} \middle| s=0\right)\right) + P\left(Y \ge -\frac{1}{2} \middle| s=-1\right) + P\left(Y \le \frac{1}{2} \middle| s=1\right)\right]
\end{aligned}
$$

Αλλά είναι $Y = Z + s$, οπότε θα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
P_e &= \frac{1}{3}\left[\left(1 - P\left(-\frac{1}{2} \le Z \le \frac{1}{2}\right)\right) + P\left(Z \ge \frac{1}{2}\right) + P\left(Z \le -\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[P\left(Z \le -\frac{1}{2}\right) + P\left(Z \ge \frac{1}{2}\right) + P\left(Z \ge \frac{1}{2}\right) + P\left(Z \le -\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \frac{2}{3}\left[P\left(Z \le -\frac{1}{2}\right) + P\left(Z \ge \frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \frac{4}{3} P\left(Z > \frac{1}{2}\right) \qquad \text{(λόγω συμμετρίας — βλέπε σχήμα 4)} \\
&= \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{2}\lambda\, e^{-\lambda z}\, \mathrm{d}z \\
&= \boxed{\frac{2}{3} e^{-\lambda/2}}
\end{aligned}
$$

Θέμα 4



(α) (i)

Σχήμα 5: Η ζητούμενη γρ. παράσταση

(ii) Προφανώς, η τ.μ. Y είναι διακριτή με τιμές $0, 1, 2, \ldots$
Για $k < 0$, είναι: $P_Y(k) = 0$. Αλλιώς:

$$\begin{aligned}
P_Y(k) &= P\,(Y = k) = P\,(k \le X < k+1) \\
&= F_X(k+1) - F_X(k) \\
&= \left(1 - e^{-\lambda(k+1)}\right) - \left(1 - e^{-\lambda\, k}\right) \qquad (X:\ \text{εκθετική τ.μ.}) \\
&= e^{-\lambda\, k} - e^{-\lambda(k+1)} \\
&= e^{-\lambda\, k}\left(1 - e^{-\lambda}\right)
\end{aligned}$$

(β) Είναι:

$$\begin{aligned}
F_X(x) = P\,(X \le x) &= 1 - P\,(X > x) \\
&= 1 - P\,(\text{κανένα αστέρι δεν βρίσκεται σε απόσταση } x) \\
&= 1 - P\,(N = 0 \text{ σε μια σφαίρα ακτίνας } x) \\
&= 1 - P_N(n)\Big|_{\substack{n=0 \\ V=\frac{4}{3}\pi x^3}} \\
&= 1 - e^{-\rho\,\frac{4}{3}\,\pi\, x^3}
\end{aligned}$$

Συνεπώς, θα έχουμε ότι:

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x} = \boxed{4\,\pi\,\rho\, x^2\, e^{-\rho\,\frac{4}{3}\,\pi\, x^3}\,, \quad x \ge 0}$$