Χειμερινό Εξάμηνο 2005 | 21 Ιανουαρίου 2006

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
Διάρκεια: 3 Ωρες

Θέμα 1 - 25 μονάδες. Βασικές Έννοιες Συνεχών Τυχαίων Μεταβλητών.

Οι δύο συνεχείς, από κοινού ομοιόμορφα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) X και Y, έχουν συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & \text{για } 0 \leq y < x \leq 2, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Έστω τα δύο γεγονότα $A = \{X \geq 0.5\}$ και $B = \{Y < 1 - X\}$.

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση του πεδίου τιμών των τ.μ. X και Y.
(β) Βρείτε τις περιθωριακές σ.π.π. των X και Y. Είναι αυτές οι δύο τ.μ. ανεξάρτητες μεταξύ τους;
(γ) Υπολογίστε τη σταθερά c.
(δ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(B/A)$.
(ε) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της δεσμευμένης σ.π.π. της X δεδομένου του $Y = 0.5$, $f_{X/Y}(x/y = 0.5)$.
(στ) Δεδομένου του $Y = 0.5$, ποια είναι η δεσμευμένη μέση τιμή και διασπορά της X;
(ζ) Υπολογίστε την $E[XY]$.

Θέμα 2 - 25 μονάδες. Κανονική Κατανομή.

Η ποσότητα X του καφέ που βρίσκεται σε πακέτα 500 gr. είναι τ.μ. που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 500 και διασπορά 25, $X \sim N(500, 25)$. Αγοράζουμε τρία πακέτα των 500 gr. Ποια είναι η πιθανότητα:

(α) ένα μόνο πακέτο από τα τρία να περιέχει τουλάχιστον 490 gr. καφέ;
(β) το καθένα από τα τρία να έχει βάρος μεταξύ 490 και 505 gr;

Εκφράστε την απάντησή σας βάσει των τιμών $\Phi(2) = 0.9772$ και $\Phi(1) = 0.8413$ της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής.

Θέμα 3 - 25 μονάδες. Τηλεπικοινωνιακό κανάλι.

Έστω το σήμα S, μια διακριτή τ.μ. που παίρνει τρεις τιμές:

$$S = \begin{cases} -1 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{3}, \\ 0 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{3}, \\ +1 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{3}, \end{cases}$$

Το σήμα μεταδίδεται μέσω τηλεπικοινωνιακού καναλιού το οποίο προσθέτει Λαπλασιανό θόρυβο Z, δηλαδή η τ.μ. Z ακολουθεί κατανομή

$$f_Z(z) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|z|}, \quad -\infty < z < \infty.$$

Το σήμα S και ο θόρυβος Z είναι ανεξάρτητες τ.μ. και η έξοδος του καναλιού, δηλαδή η τ.μ. που παρατηρούμε είναι η $Y = S + Z$.

(α) Βρείτε την δεσμευμένη σ.π.π. $f_{Y/S}(y/s)$ για $s = -1, 0, +1$.
(β) Χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο κανόνα απόφασης για το ποιο από τα τρία σύμβολα εστάλη: Αν $Y < -1/2$ αποφασίζουμε ότι εστάλη το -1, αν $-1/2 \leq Y \leq 1/2$ αποφασίζουμε ότι εστάλη το 0, και αν $Y > 1/2$ αποφασίζουμε ότι εστάλη το $+1$. Υπολογίστε τις δεσμευμένες πιθανότητες λάθους απόφασης, $P(\text{σφάλμα/εστάλη το } s)$, για $s = -1, 0, +1$, και κατόπιν χρησιμοποιώντας τον κανόνα της ολικής πιθανότητας υπολογίστε την πιθανότητα λάθους απόφασης.

Θέμα 4 - 25 μονάδες. Μετασχηματισμοί Τυχαίων Μεταβλητών.

(α) Έστω ότι η τ.μ. X είναι εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο λ. Η κβαντισμένη τιμή της X δίνεται ως ο μετασχηματισμός

$$Y = k, \quad \text{όταν} \;\; k \leq X < k+1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

(i) Δώστε τη γραφική παράσταση του μετασχηματισμού.
(ii) Τι είδους τ.μ. είναι η Y; Δώστε την πλήρη στατιστική περιγραφή της.

(β) Η τ.μ. N μοντελοποιεί το πλήθος των αστεριών σε μία περιοχή του διαστήματος με όγκο V. Υποθέτουμε ότι η N ακολουθεί κατανομή Poisson με συνάρτηση πιθανότητας

$$p_N(n) = \frac{e^{-\rho V}(\rho V)^n}{n!}, \quad \text{για} \;\; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

όπου η παράμετρος ρ εκφράζει την πυκνότητα των αστεριών στο διάστημα. Επιλέγουμε ένα αυθαίρετο σημείο στο διάστημα και ορίζουμε την τ.μ. X ως την απόσταση από το σημείο αυτό έως το πλησιέστερο αστέρι. Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής και κατόπιν την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X.