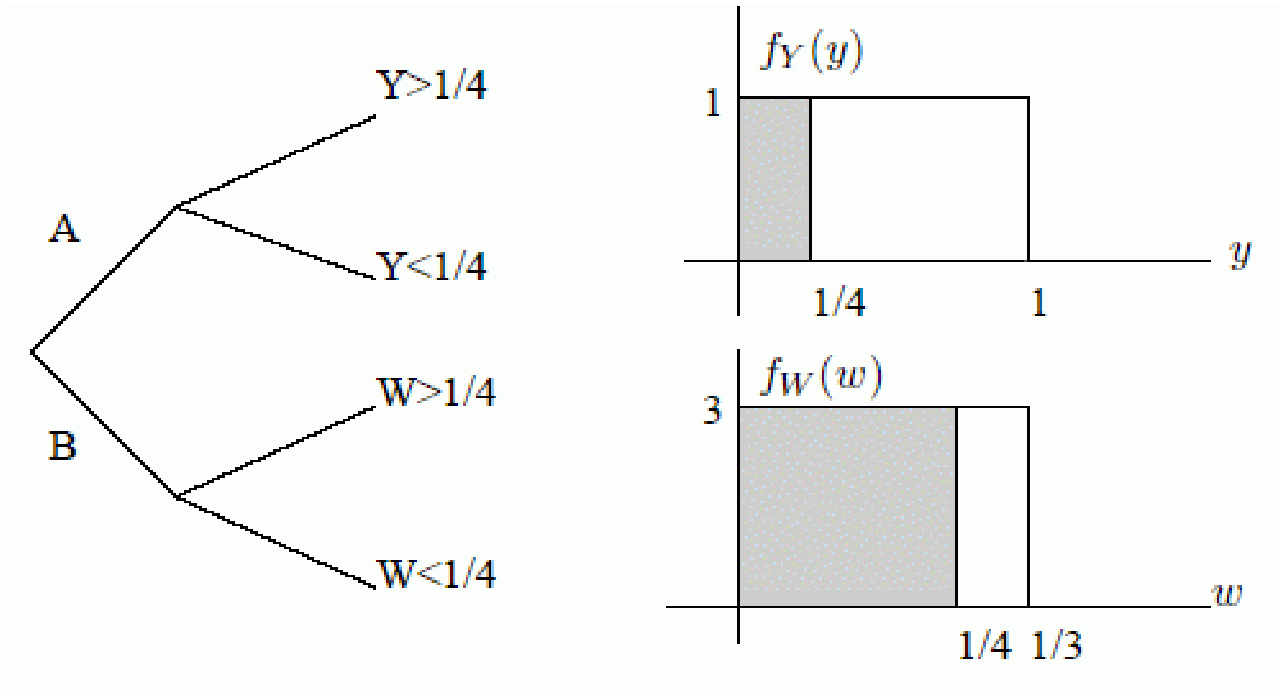
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2005
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 19/12/2005 Ημερομηνία Παράδοσης: 11/01/2006

Άσκηση 1. Πρώτα, σχεδιάζουμε ένα δένδρο με κλαδιά, το οποίο φαίνεται στο σχήμα 1. Έπειτα,



Σχήμα 1: Δενδρικό διάγραμμα και γρ. παραστάσεις των $f_Y(y)$ και $f_W(w)$

χρησιμοποιώντας τις διδόμενες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας της άσκησης, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις ακόλουθες δύο πιθανότητες:

$$\begin{aligned} P\left(Y \leq \frac{1}{4}\right) &= \int_0^{\frac{1}{4}} f_Y(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{4} \\ P\left(W \leq \frac{1}{4}\right) &= \int_0^{\frac{1}{4}} f_W(w)\mathrm{d}w = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Εν τέλει, χρησιμοποιώντας το κανόνα του Bayes βρίσκουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
P\left(A \mid X < \frac{1}{4}\right) &= \frac{P(A)\ P\left(X \le \frac{1}{4} \mid A\right)}{P\left(X \le \frac{1}{4}\right)} = \frac{P(A)\ P\left(Y \le \frac{1}{4}\right)}{P\left(X \le \frac{1}{4}\right)} \\
&= \frac{P(A)\ P\left(Y \le \frac{1}{4}\right)}{P(A)\ P\left(X \le \frac{1}{4} \mid A\right) + P(B)\ P\left(X \le \frac{1}{4} \mid B\right)} \\
&= \frac{P(A)\ P\left(Y \le \frac{1}{4}\right)}{P(A)\ P\left(Y \le \frac{1}{4}\right) + P(B)\ P\left(W \le \frac{1}{4}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Άσκηση 2.

(α) Εφόσον οι X και Y είναι ανεξάρτητες, η κοινή τους συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα ισούται με:

$$
f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} 1\ , & 0 < x,\ y \le 1 \\ 0\ , & \text{αλλιώς.} \end{cases}
$$

Ορίζουμε το γεγονός R_1 ότι $X \le 0,25$ και το γεγονός R_2 ότι $Y \le 0,25$. Ένα μήνυμα γίνεται αποδεκτό 15 λεπτά αφότου ο A έστειλε και τα δύο μηνύματα όποτε τουλάχιστον ένα από τα R_1 και R_2 συμβαίνει. Επομένως, η πιθανότητα που θέλουμε να υπολογίσουμε θα ισούται με:

$$
P\left(R_1 \cup R_2\right) = P\left(R_1\right) + P\left(R_2\right) - P\left(R_1 \cap R_2\right)
$$

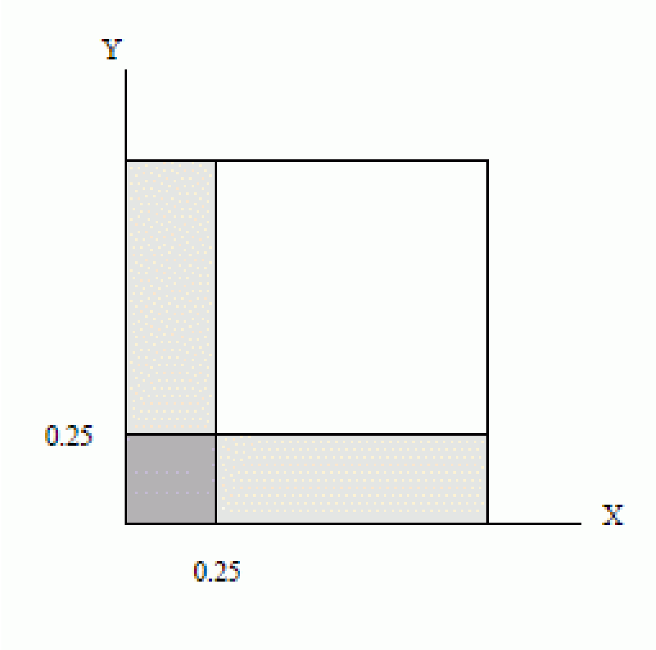
Υπολογίζουμε τον κάθε όρο της παραπάνω εξίσωσης ξεχωριστά ως εξής:

$$
\begin{aligned}
P(R_1) &= P\left(X \le \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \\
P(R_2) &= P\left(Y \le \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \\
P\left(R_1 \cap R_2\right) &= P(R_1) \cdot P(R_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}\ , \qquad \text{αφού οι } X \text{ και } Y \text{ είναι ανεξάρτητες}
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$
P\left(R_1 \cup R_2\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}
$$

Σημειώστε ότι η ζητούμενη πιθανότητα μπορεί να βρεθεί και από το εμβαδό της σκιαγραμμένης περιοχής του σχήματος 2.



Σχήμα 2: Η γρ. παράσταση της $f_{X,Y}(x,y)$ και η πιθανότητα $P\left(X \le 0,25 \cup Y \le 0,25\right)$

(β) Έστω B το γεγονός ότι το μήνυμα λαμβάνεται αλλά δεν επαληθεύεται μέσα στα 15 λεπτά. Τότε θα ισχύει ότι:

$$B = R_1 \cap R_2^c \cup R_1^c \cap R_2$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι ένωση δύο ξένων γεγονότων, οπότε θα έχουμε:

$$P(B) = P\left(R_1 \cap R_2^c\right) + P\left(R_2 \cap R_1^c\right)$$

Όμως, επειδή τα γεγονότα R_1 και R_2 είναι ανεξάρτητα, θα έχουμε τελικά:

$$P(B) = P(R_1) \cdot P(R_2^c) + P(R_2) \cdot P(R_1^c) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

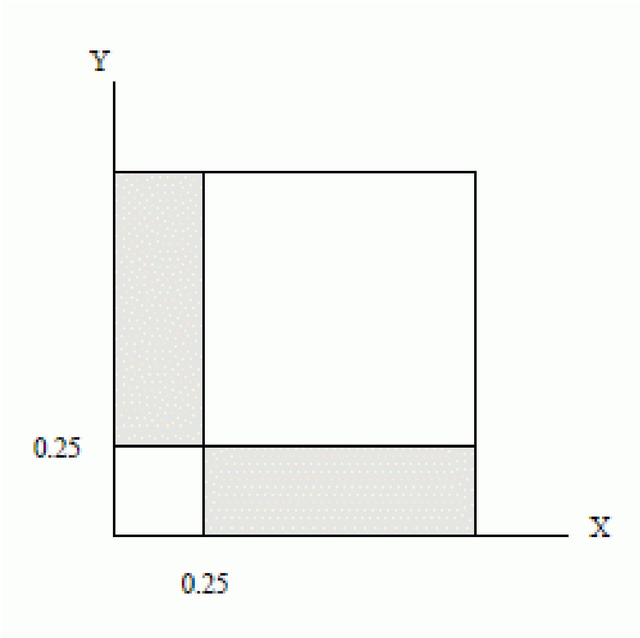
Σημειώστε ότι η παραπάνω πιθανότητα μπορεί να βρεθεί και από το εμβαδόν των δύο σκιαγραμμημένων περιοχών του σχήματος 3.

(γ) Η επικύρωση συμβαίνει όταν και το δεύτερο μήνυμα φθάσει, οπότε για $t \in [0\,,1]$ θα είναι:

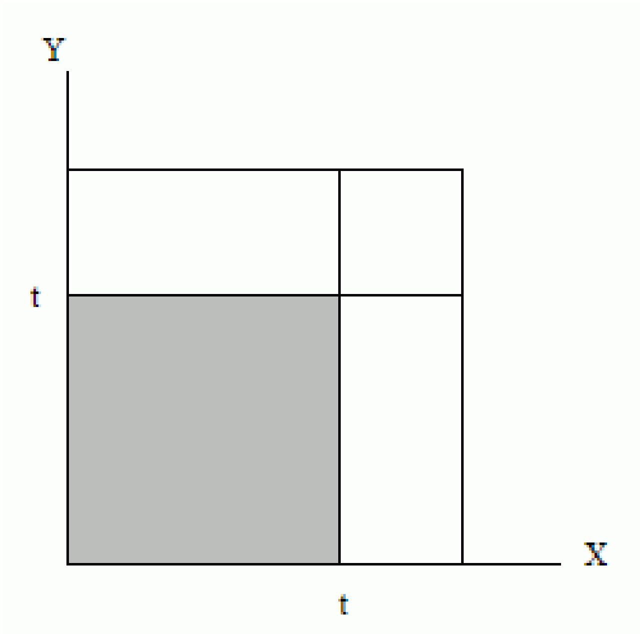
$$\begin{aligned} F_T(t) &= P\left(X \le t \quad \text{και} \quad Y \le t\right) \\ &= P\left(X \le t\right) \cdot P\left(Y \le t\right) \qquad (\text{από την ανεξαρτησία των } X \text{ και } Y) \\ &= t \cdot t = t^2 \end{aligned}$$

Από την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να συμπεράνουμε ολόκληρη την αθροιστική συνάρτηση κατανομής και έπειτα να διαφορίσουμε ώστε να πάρουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0\,, & -\infty < t \le 0 \\ t^2\,, & 0 < t \le 1 \\ 1\,, & 1 < t < \infty \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad f_T(t) = \begin{cases} 2t\,, & 0 \le t \le 1 \\ 0\,, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



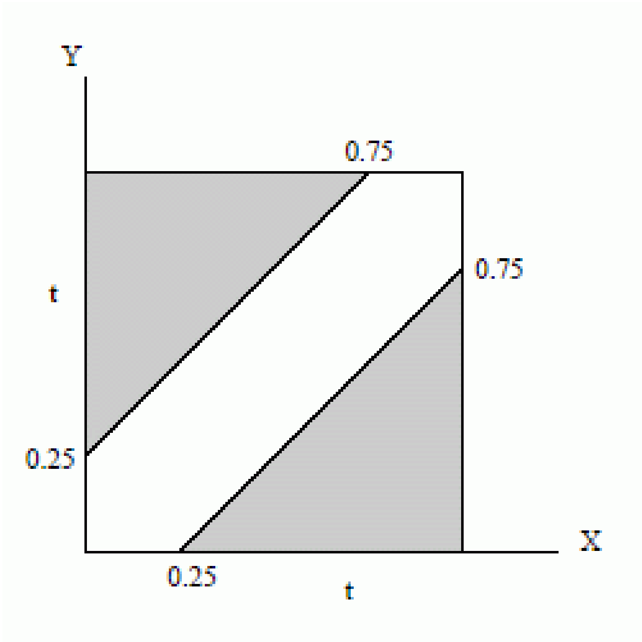
Σχήμα 3: Η γρ. παράσταση της $f_{X,Y}(x,y)$ και η πιθανότητα $P\left(B\right)$



Σχήμα 4: Η γρ. παράσταση της $f_{X,Y}(x,y)$ και το εμβαδόν ίσο με την $F_T(t)$

(δ) Το γεγονός ότι ο υπάλληλος θα είναι εκεί για να λάβει το μήνυμα είναι: $\left\{|X-Y|>\frac{1}{4}\right\}$. Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την πιθανότητα του εν λόγω γεγονότος από το εμβαδόν των σκιαγραμμημένων περιοχών του σχήματος 5. Έχουμε:

$$P\left(|X-Y|>\frac{1}{4}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{16}$$

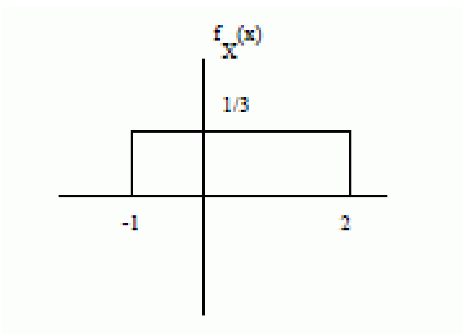


Σχήμα 5: Η γρ. παράσταση της $f_{X,Y}(x,y)$ και η πιθανότητα $P\left(|X-Y|>\frac{1}{4}\right)$

(ε) Ξέρουμε ότι η στρατηγική από το μέρος (δ) της άσκησης έχει πιθανότητα $\frac{5}{16}$ επικύρωσης. Η άλλη στρατηγική, το να στείλουμε τον εργαζόμενο σπίτι έπειτα από 45 λεπτά, έχει πιθανότητα επικύρωσης $P\left(T \le \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{16}$, αποτιμώντας την έκφραση που βρήκαμε από το μέρος (γ) της άσκησης. Επομένως, και οι δύο στρατηγικές είναι το ίδιο αποτελεσματικές.

Άσκηση 3.

(α) Σημειώστε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X φαίνεται στο σχήμα 6. Πρώτα,



Σχήμα 6: Η γρ. παράσταση της $f_X(x)$

θα προσπαθήσουμε να βρούμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Y:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(X^2 \le y\right) = P\left(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\right), \text{ με } y > 0$$

Εφόσον η $f_X(x)$ δεν είναι συμμετρική γύρω από το $x=0$, πρέπει να θεωρήσουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$
\begin{aligned}
0 < \sqrt{y} \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad F_Y(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{y} \\
1 < \sqrt{y} \leq 2 \quad &\Rightarrow \quad F_Y(y) = \int_{-1}^{\sqrt{y}} \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(1+\sqrt{y}) \\
\sqrt{y} > 2 \quad &\Rightarrow \quad F_Y(y) = \int_{-1}^{2} \frac{1}{3}\mathrm{d}x = 1
\end{aligned}
$$

Επομένως, θα έχουμε:

$$
F_Y(y) = \begin{cases} 0\ , & y \leq 0 \\ \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{y}\ , & 0 < y \leq 1 \\ \frac{1}{3}\left(1+\sqrt{y}\right)\ , & 1 < y \leq 4 \\ 1\ , & y > 4 \end{cases}
$$

Συνεπώς, θα έχουμε:

$$
f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y} = \begin{cases} \frac{1}{3}y^{-\frac{1}{2}}\ , & 0 < y \leq 1 \\ \frac{1}{6}y^{-\frac{1}{2}}\ , & 1 < y \leq 4 \\ 0\ , & \text{αλλιώς} \end{cases}
$$

(β) Θα είναι:

$$
F_Y(y) = P\left(Y \leq y\right) = P\left(\sqrt{|X|} \leq y\right) = P\left(|X| \leq y^2\right) = P\left(-y^2 < X \leq y^2\right)
$$

Οπότε:

$$
\begin{aligned}
0 < y^2 \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad F_Y(y) = \int_{-y^2}^{y^2} \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot 2y^2 \\
1 < y^2 \leq 2 \quad &\Rightarrow \quad F_Y(y) = \int_{-1}^{y^2} \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(1+y^2\right) \\
y^2 > 2 \quad &\Rightarrow \quad F_Y(y) = \int_{-1}^{2} \frac{1}{3}\mathrm{d}x = 1
\end{aligned}
$$

Επομένως, θα είναι:

$$
F_Y(y) = \begin{cases} 0\ , & y \leq 0 \\ \frac{1}{3}\cdot 2y^2\ , & 0 < y \leq 1 \\ \frac{1}{3}\left(1+y^2\right)\ , & 1 < y \leq \sqrt{2} \\ 1\ , & y > \sqrt{2} \end{cases}
$$

Συνεπώς, θα έχουμε:

$$
f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y} = \begin{cases} \frac{4}{3}y\ , & 0 < y \leq 1 \\ \frac{2}{3}y\ , & 1 < y \leq \sqrt{2} \\ 0\ , & \text{αλλιώς} \end{cases}
$$

(γ) Θα είναι:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\left(Y \le y\right) = P\left(-\ln|X| \le y\right) = P\left(\ln|X| \ge -y\right) = P\left(|X| \ge e^{-y}\right) \\ &= P\left(X \ge e^{-y} \cup X \le -e^{-y}\right) = P\left(X \ge e^{-y}\right) + P\left(X \le -e^{-y}\right) \end{aligned}$$

όπου η τελευταία πιθανότητα σπάει διότι τα δύο γεγονότα είναι ξένα μεταξύ τους. Οπότε, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} e^{-y} \le 1 \quad &\Rightarrow \quad F_Y(y) = \int_{e^{-y}}^{2} \frac{1}{3}\mathrm{d}x + \int_{-1}^{-e^{-y}} \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(2 - e^{-y}\right) + \frac{1}{3}\left(-e^{-y} + 1\right) \\ 1 < e^{-y} \le 2 \quad &\Rightarrow \quad F_Y(y) = \int_{e^{-y}}^{2} \frac{1}{3}\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{-e^{-y}} 0\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(2 - e^{-y}\right) \\ e^{-y} > 2 \quad &\Rightarrow \quad F_Y(y) = \int_{e^{-y}}^{\infty} 0\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{-e^{-y}} 0\,\mathrm{d}x = 0 \end{aligned}$$

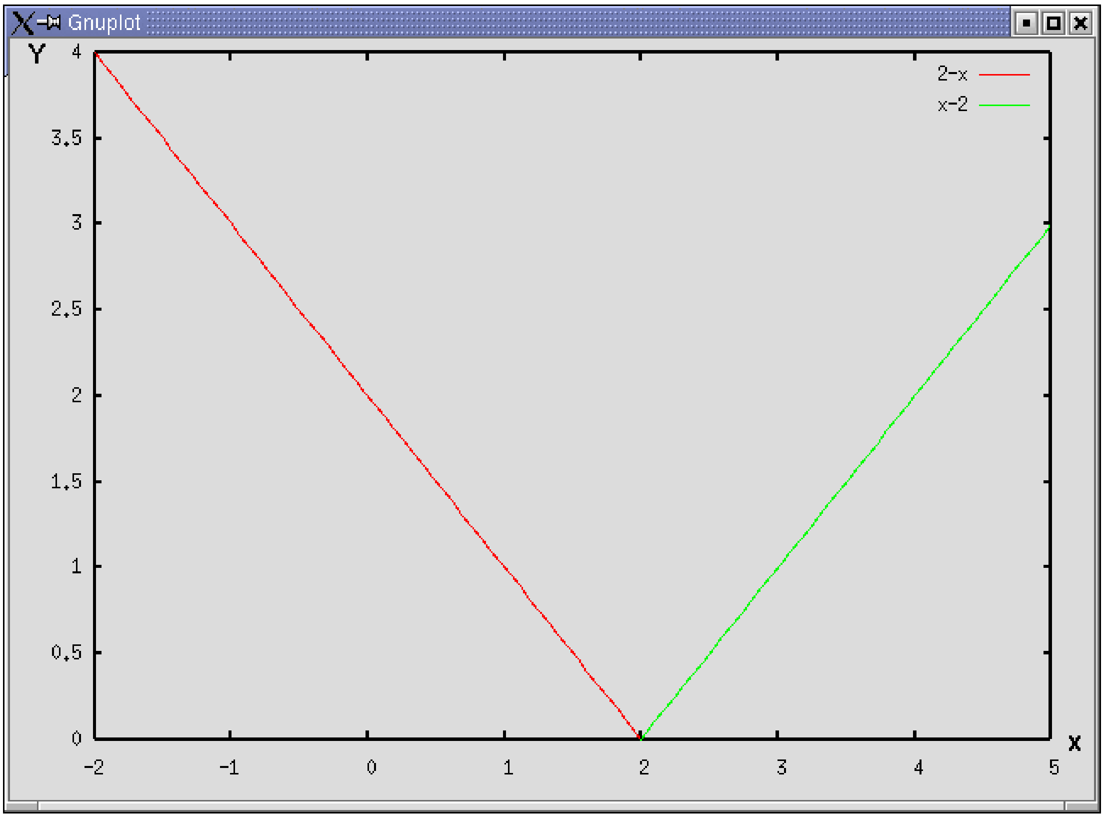
Επομένως, θα είναι:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0\ , & y < -\ln 2 \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3}e^{-y}\ , & -\ln 2 \le y < 0 \\ 1 - \frac{2}{3}e^{-y}\ , & y \ge 0 \end{cases}$$

Συνεπώς, θα έχουμε:

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y} = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-y}\ , & -\ln 2 \le y < 0 \\ \frac{2}{3}e^{-y}\ , & y \ge 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Άσκηση 4.

(α) 

Σχήμα 7: Γραφική παράσταση των $y = 2 - x$ και $y = 2 + x$

Το πεδίο τιμών της Y είναι το $[0, 3]$.

(β) Είναι:

$$\begin{aligned}
E[Y] &= E[|X - Z|] = \int_{-1}^{4} \frac{1}{5}\,|x-2|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{2} \frac{1}{5}\,(2-x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{4} \frac{1}{5}\,(x-2)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{5}\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{2} + \frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{2}^{4} = 1.3
\end{aligned}$$

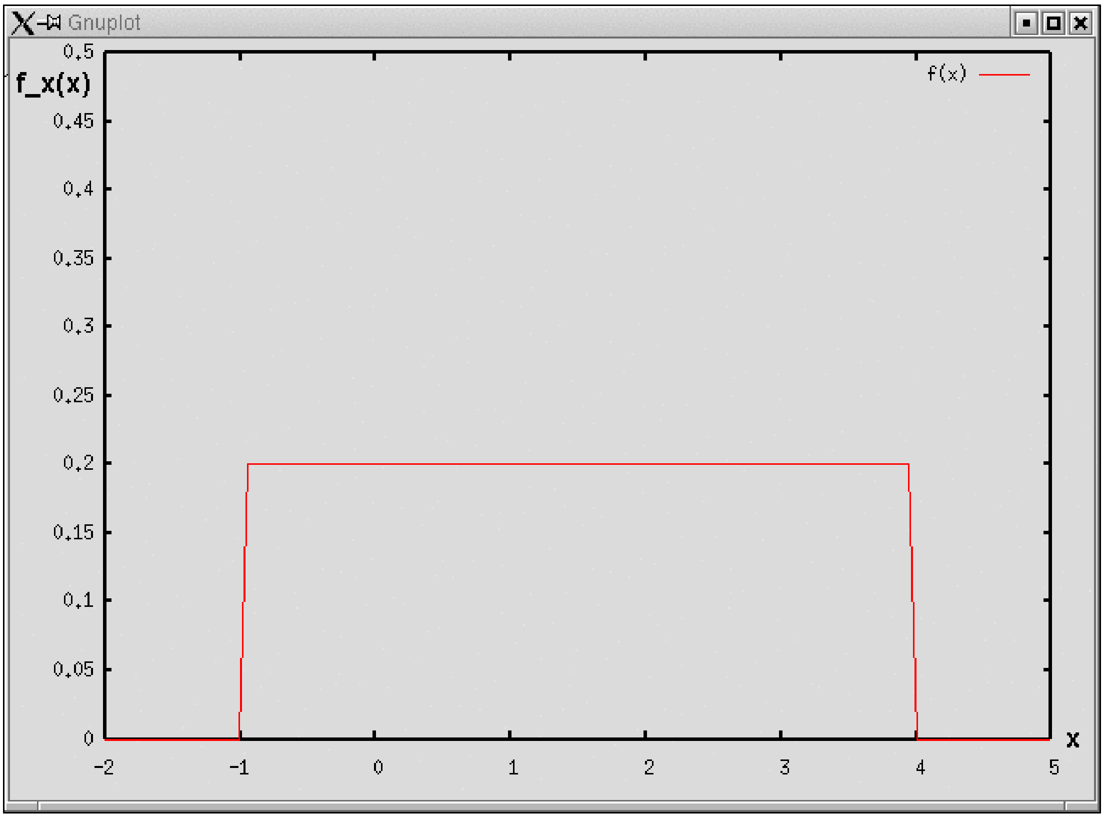
(γ) Έχουμε ότι:

- $y \le 0\,, \quad F_Y(y) = P(Y \le y) = 0$
- $y \ge 3\,, \quad F_Y(y) = P(Y \le y) = 1$
- $0 \le y \le 2$,

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(2 - y \le X \le 2 + y) \\
&= \frac{1}{5}\,[(2+y) - (2-y)] = 0.4\,y
\end{aligned}$$

- $2 \le y \le 3$,

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(2 - y \le X \le 4) \\
&= \frac{1}{5}\,[4 - (2-y)] = 0.2\,(2+y)
\end{aligned}$$



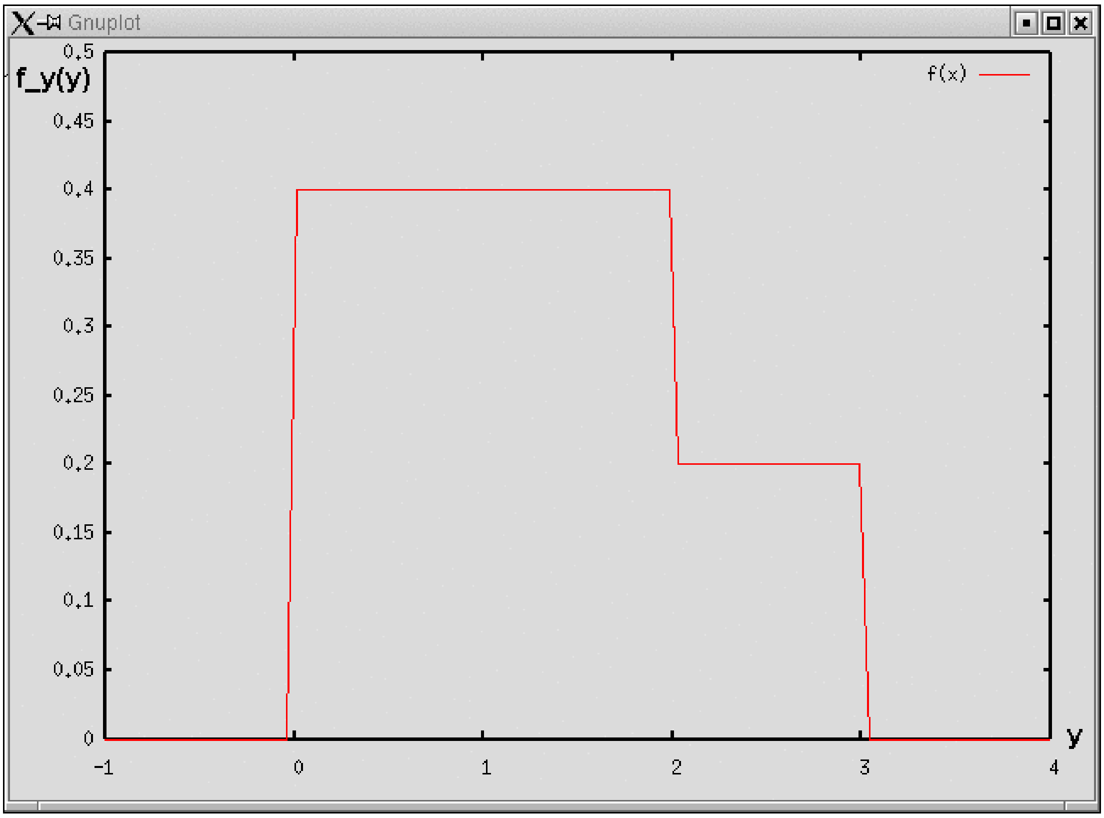
Σχήμα 8: Γραφική παράσταση της $f_X(x)$

Οπότε έχουμε:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 0.4\,y & 0 \leq y \leq 2 \\ 0.2\,(2+y) & 2 \leq y \leq 3 \\ 1 & y \geq 3 \end{cases}$$

Συνεπώς,

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y} = \begin{cases} 0.4 & 0 \leq y \leq 2 \\ 0.2 & 2 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



Σχήμα 9: Γραφική παράσταση της $f_Y(y)$

Άσκηση 5. Για να εκφράσουμε τον $\rho_{X,2Y}$ σε σχέση με τον $\rho_{X,Y}$, προχωράμε ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}
COV\,(X,2Y) &= E\,((X-EX)\,(2Y-E2Y)) \\
&= 2E\,((X-EX)\,(Y-EY)) = 2COV\,(X,Y) \\
\sigma_{2Y} &= \sqrt{E\,(2Y-E2Y)^2} = \sqrt{4E\,(Y-EY)^2} = 2\sigma_Y \\
\rho_{X,2Y} &= \frac{COV\,(X,2Y)}{\sigma_X\,\sigma_{2Y}} = \frac{2COV\,(X,Y)}{\sigma_X\,2\sigma_Y} = \frac{COV\,(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y} = \rho_{X,Y}
\end{aligned}$$

Εν γένει, ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης των $aX+b$ και $cY+d$ είναι $\rho_{X,Y}$ αν $a>0,\ b>0$ και $c>0,\ d>0$.