

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2005
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων:
Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές (2)

Ημερομηνία Ανάθεσης: 19/12/2005

Ημερομηνία Παράδοσης: 11/01/2006

Άσκηση 1. Επιλέγουμε μεταξύ δύο τροχών της τύχης, A και B, ρίχνοντας ένα δίκαιο κέρμα. Γυρίζουμε τον τροχό που έχει επιλεγεί οπότε προκύπτει η πειραματική τιμή της τ.μ. X . Οι τ.μ. Y και W μοντελοποιούν την μέτρηση που παίρνουμε από το γύρισμα του τροχού A και B, αντίστοιχα, και έχουν συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 < y \leq 1, \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

και

$$f_W(w) = \begin{cases} 3 & 0 < w \leq \frac{1}{3}, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Αν μας πουν ότι η πειραματική τιμή της τ.μ. X είναι μικρότερη του $\frac{1}{4}$, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι επιλέχθηκε ο τροχός A;

Άσκηση 2. Δύο σταθμοί A και B συνδέονται μεταξύ τους με δύο *παράλληλα* κανάλια επικοινωνίας 1 και 2. Στέλνουμε συγχρόνως μέσω και των δύο καναλιών ένα μήνυμα από το σταθμό A στο σταθμό B. Οι τ.μ. X και Y μοντελοποιούν την χρονική καθυστέρηση (σε ώρες) παραλαβής του μηνύματος μέσω των καναλιών 1 και 2, αντίστοιχα. Οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ομοιόμορφα κατανομημένες στο διάστημα $[0, 1]$. Ένα μήνυμα θεωρείται ότι έχει ληφθεί όταν φτάνει στο σταθμό B μέσω οποιουδήποτε από τα δύο κανάλια, ενώ θεωρείται ότι έχει επαληθευθεί όταν φτάνει στο σταθμό B μέσω και των δύο καναλιών.

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι το μήνυμα έχει ληφθεί εντός 15 λεπτών της ώρας μετά την αποστολή του;
- (β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι το μήνυμα έχει ληφθεί αλλά όχι επαληθευθεί εντός 15 λεπτών της ώρας μετά την αποστολή του;
- (γ) Έστω η τ.μ. T η οποία μοντελοποιεί το χρόνο (σε ώρες) από την αποστολή του μηνύματος από το σταθμό A μέχρι την επαλήθευσή του στο σταθμό B. Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) της τ.μ. T και κατόπιν τη σ.π.π. της T .
- (δ) Αν ο υπάλληλος του σταθμού B φύγει για ένα 15λεπτο διάλειμμα αμέσως μετά τη λήψη του μηνύματος, ποια είναι η πιθανότητα ότι θα βρίσκεται παρών στο πόστο του για επαλήθευση;
- (ε) Η διεύθυνση θέλει να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα ο υπάλληλος να είναι παρών και για την λήψη αλλά και για την επαλήθευση του μηνύματος. Είναι προτιμότερο να τον αφήσουν να κάνει το διάλειμμά του όπως περιγράφεται στο (δ) ή να τον αφήσουν να φύγει σπίτι του 45 λεπτά μετά την αποστολή του μηνύματος;

Άσκηση 3. Έστω X συνεχής τ.μ. ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[-1, 2]$. Βρείτε την α.σ.κ. και την σ.π.π. της τ.μ. Y , όπου

(α) $Y = X^2$

(β) $Y = \sqrt{|X|}$

(γ) $Y = -\ln(|X|)$.

Άσκηση 4. Έστω ότι η τ.μ. X είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[-1, 4]$. Η X μετασχηματίζεται στην τ.μ. $Y = |X - 2|$.

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση του μετασχηματισμού και βρείτε το πεδίο τιμών της τ.μ. Y .

(β) Βρείτε τη μέση τιμή της τ.μ. Y , $E[Y]$.

(γ) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_Y(y)$, και κατόπιν τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_Y(y)$, της τ.μ. Y .

Άσκηση 5. Έστω δύο τ.μ. X και Y με συντελεστή ετεροσυσχέτισης $\rho_{X,Y}$. Ποιος είναι ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης των τ.μ. X και $2Y$;