ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2005
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 12/12/2005 Ημερομηνία Παράδοσης: 11/01/2006

Άσκηση 1.

(α) Έχουμε ότι: P(ασχολείται για ακριβώς 2 ώρες) $= P\{X = 2\} = F_X(2^+) - F_X(2^-) = 1/4$

(β) Έχουμε ότι: P(ασχολείται για πάνω από 2 ώρες) $= P\{X > 2\} = 1 - F_X(2^+) = 1/4$

(γ) Έχουμε ότι: P(ασχολείται για λιγότερο από 2 ώρες) $= P\{X < 2\} = F_X(2^-) = 1/2$

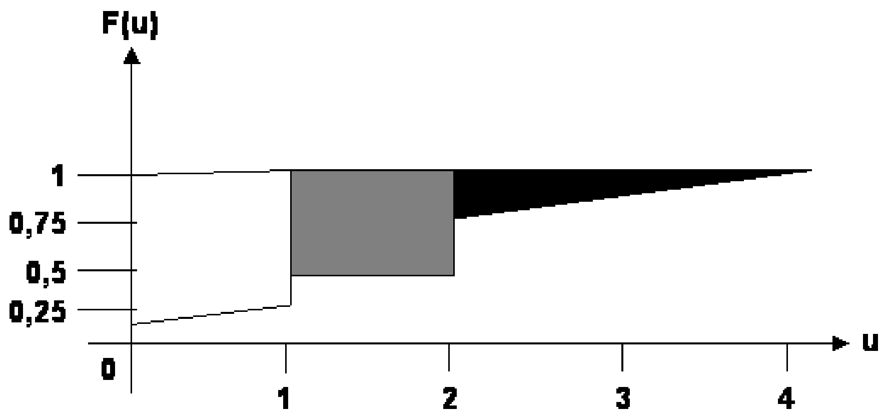
(δ) Έχουμε ότι: P(ασχολείται για ακριβώς 3 ώρες) $= P\{X = 3\} = F_X(3^+) - F_X(3^-) = 0$

(ε) Έχουμε ότι: P(ασχολείται για πάνω από 1/2 και λιγότερο από 3 ώρες) $= P\{1/2 < X < 3\} = F_X(3^-) - F_X((1/2)^+) = 7/8 - 3/16 = 11/16$

(στ) Έχουμε ότι: P(ασχολείται για πάνω από 2 ώρες δεδομένου ότι σίγουρα ασχολείται) $=$

$$P\{X > 2 \mid X > 0\} = \frac{P(\{X > 2\} \cap \{X > 0\})}{P(\{X > 0\})} = \frac{P\{X > 2\}}{P\{X > 0\}} = \frac{1 - F_X(2^+)}{1 - F_X(0^+)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} = \frac{2}{7}$$

(ζ) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_X(u)$, φαίνεται στο σχήμα 1. Όπως έχει συζητηθεί και



Σχήμα 1: Η γρ. παράσταση της $F_X(u)$

στην τάξη, η μέση τιμή $E[X]$ της τ.μ. X θα ισούται το εμβαδόν της σκιαγραμμένης περιοχής μεταξύ της $F_X(u)$ και της ευθείας με ύψος ίσο με 1. Με χρήση στοιχειώδους γεωμετρίας, η ζητούμενη μέση τιμή θα ισούται με:
$1 \times (7/8 + 6/8)/2 + 1/2 + (1/2) \times (2) \times (1/4) = 22/16 = 1,375$ ώρες.

Άσκηση 2. Έχουμε ότι:

$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x) = \begin{cases} 3a^3x^{-4}, & \text{αν } x \geq a, \\ 0, & \text{αν } x < a \end{cases}$$

Επίσης, έχουμε ότι:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_a^{\infty} x \cdot 3a^3x^{-4}dx = 3a^3 \int_a^{\infty} x^{-3}dx = 3a^3 \left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)\Bigg|_a^{\infty} = \frac{3a}{2}$$

Έπειτα έχουμε ότι:

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_a^{\infty} x^2 \cdot 3a^3x^{-4}dx = 3a^3 \int_a^{\infty} x^{-2}dx = 3a^3 \left(-x^{-1}\right)\Big|_a^{\infty} = 3a^2$$

Επομένως, η διασπορά θα ισούται με:

$$var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 3a^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$$

Άσκηση 3.

(α) Είναι:

$$E[X] = \int_x x f_X(x)dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

και

$$P\left(X \geq \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^1 f_X(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx = \frac{1}{2}$$

(β) Έστω ότι A δηλώνει το γεγονός $\{X \geq t\}$ και έστω $Y = X - t$. Εφόσον δεν μπορούμε να θέσουμε υπό όρους ένα γεγονός με μηδενική πιθανότητα, το πιο λογικό είναι να έχουμε το $t < 1$. Επιπλέον, είναι βολικό να διαχωρίσουμε τις περιπτώσεις $t \leq 0$ και $0 < t < 1$.

Για $t \leq 0$, το γεγονός A πάντα συμβαίνει και η Y είναι (υπό όρους και χωρίς όρους) κατανεμημένη ομοιόμορφα στο $[-t, -t+1]$.

Για $0 < t < 1$, το γεγονός A συμβαίνει με πιθανότητα $1 - t$ και έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f_{X|A}(x) &= \frac{f_X(x)}{P(A)} \quad \text{για } x \geq t \text{ (και 0 αλλιώς)} \\ &= \frac{1}{1-t} \quad \text{για } t \leq x \leq 1 \text{ (και 0 αλλιώς)} \end{aligned}$$

Συνεπώς, υπό τη συνθήκη A, η Y είναι κατανεμημένη ομοιόμορφα στο $[0, 1-t]$.

(γ) Ξέρουμε ότι: $E[X] = \dfrac{1}{\lambda}$. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας εκθετικής τυχαίας μεταβλητής, γνωρίζουμε ότι: $P(X \geq \alpha) = e^{-\lambda\alpha}$. Επομένως, θα είναι ότι: $P(X \geq E[X]) = e^{-\lambda\frac{1}{\lambda}} = e^{-1}$.

(δ) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των υποθετικών πυκνοτήτων και ποσοτήτων που έχουμε ήδη υπολογίσει, έχουμε ότι:

$$f_{X|A}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{P(A)}\ , & x \geq t \\ 0\ , & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda t}}\ , & x \geq t \\ 0\ , & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-t)}\ , & x \geq t \\ 0\ , & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Τελικά, με αντικατάσταση, έχουμε ότι:

$$f_{Y|A}(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}\ , & y \geq 0 \\ 0\ , & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Σημειώστε ότι στην απάντηση (δ), η υποθετική πυκνότητα της Y είναι πανομοιότυπη με την πυκνότητα της X. Αυτό ονομάζεται ‘ ιδιότητα της απώλειας μνήμης ’ των εκθετικών τυχαίων μεταβλητών. Στην απάντηση (β), η υποθετική πυκνότητα της Y είναι ομοιόμορφη αλλά δεν είναι πανομοιότυπη με την πυκνότητα της X. Οι ομοιόμορφες τυχαίες μεταβλητές δεν έχουν την ιδιότητα της απώλειας μνήμης.

Άσκηση 4. Έστω X και Y οι αποστάσεις των βολών του Κώστα και της Μαρίας, αντίστοιχα. Οι βολές είναι ανεξάρτητες, οπότε η κοινή τους συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα ισούται με:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{100}\dfrac{1}{60}e^{-\frac{y}{60}}, & 0 \leq X \leq 100, Y \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Θα έχουμε:

(α)

$$P(X = 75) = \int_{75}^{75} \frac{1}{100}dx = 0$$

(β)

$$P(Y > 100) = \int_{100}^{\infty} \frac{1}{60}e^{-\frac{y}{60}}dy = e^{-\frac{100}{60}} \approx 0,1889$$

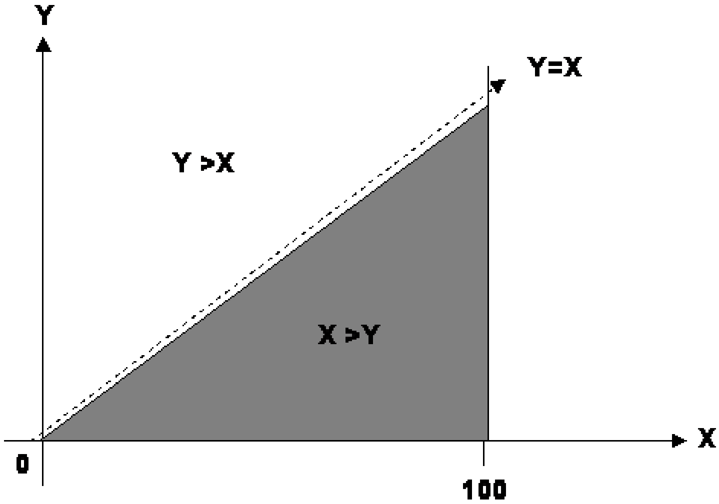
(γ) Είναι: $E[X] = 50, E[Y] = 60$.

(δ) Θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα $P(X > Y)$ και να την συγκρίνουμε με την πιθανότητα $P(X < Y)$. Για να το κάνουμε αυτό, εξετάζουμε το κοινό δειγματικό χώρο του σχήματος 2. Επομένως, θα έχουμε:

$$P(X > Y) = \int_0^{100}\int_0^x f_{X,Y}(x,y)dydx = \int_0^{100}\int_0^x \frac{1}{100}\frac{1}{60}e^{-\frac{y}{60}}dydx \approx 0,5133$$

Παρομοίως βρίσκουμε ότι: $P(Y > X) = 1 - P(X > Y) \approx 0,4867$. Απλώς κοιτάζοντας τις αναμενόμενες τιμές των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, θα έλεγε κανείς ότι είναι πιο πιθανό η Μαρία να ρίξει πιο μακριά. Όμως, τελικά βρήκαμε ότι η πιθανότητα ότι ο Κώστας θα ρίξει παραπάνω είναι ελαφρώς υψηλότερη.

(ε) Είναι: $f_{Y|X}(y/75) = f_Y(y)$ διότι οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες.



Σχήμα 2: Η πιθανότητα $P\,(X > Y)$

(στ) Έστω $W = Y - X$. Πρώτα, βρίσκουμε τη κοινή συνάρτηση κατανομής της W:

$$F_W(w) = P(W \leq w) = P(Y - X \leq w) = P(Y \leq X + w)$$

Το γεγονός φαίνεται στο σχήμα 3.

Για $-100 \leq W \leq 0$ έχουμε:

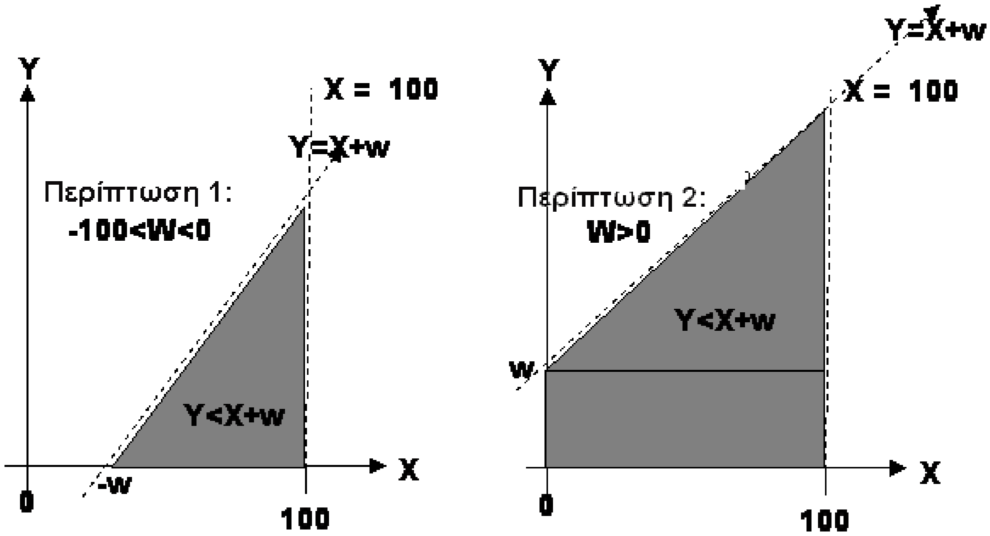
$$\begin{aligned} F_W(w) &= \int_{-w}^{100}\int_{0}^{x+w} f_{X,Y}(x,y)dydx = \int_{-w}^{100}\int_{0}^{x+w} \frac{1}{100}\frac{1}{60}e^{-\frac{y}{60}}dydx \\ &= \frac{1}{100}(60\,e^{-\frac{1}{60}(w+100)} + w + 40) \end{aligned}$$

Για $W \geq 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} F_W(w) &= \int_{0}^{100}\int_{0}^{x+w} f_{X,Y}(x,y)dydx = \int_{0}^{100}\int_{0}^{x+w} \frac{1}{100}\frac{1}{60}e^{-\frac{y}{60}}dydx \\ &= \frac{3}{5}e^{-\frac{w}{60}}(e^{-\frac{5}{3}} - 1) + 1 \end{aligned}$$

Εν τέλει, διαφορίζοντας τις προηγούμενες εξισώσεις παίρνουμε ότι:

$$f_W(w) = \frac{d}{dw}F_W(w) = \begin{cases} \dfrac{1}{100}(1 - e^{-\frac{1}{60}(w+100)}), & -100 \leq w \leq 0 \\ \dfrac{1}{100}e^{-\frac{w}{60}}(1 - e^{-\frac{5}{3}}), & w \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



Σχήμα 3: 2 περιπτώσεις για τις τιμές της $F_W(w)$

Άσκηση 5. Πρώτα, θα βρούμε την οριακή πιθανότητα της X και την υπό προϋπόθεση πιθανότητα της Y. Έχουμε ότι:

$$f_X(x) = \int_0^x f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^x Qx^2 y dy = Qx^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x = \frac{Qx^4}{2}$$

Επομένως, θα είναι:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{Qx^4}{2}\ , & 0 \le x \le 10 \\ 0\ , & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Για την υπό προϋπόθεση πιθανότητα θα έχουμε ότι:

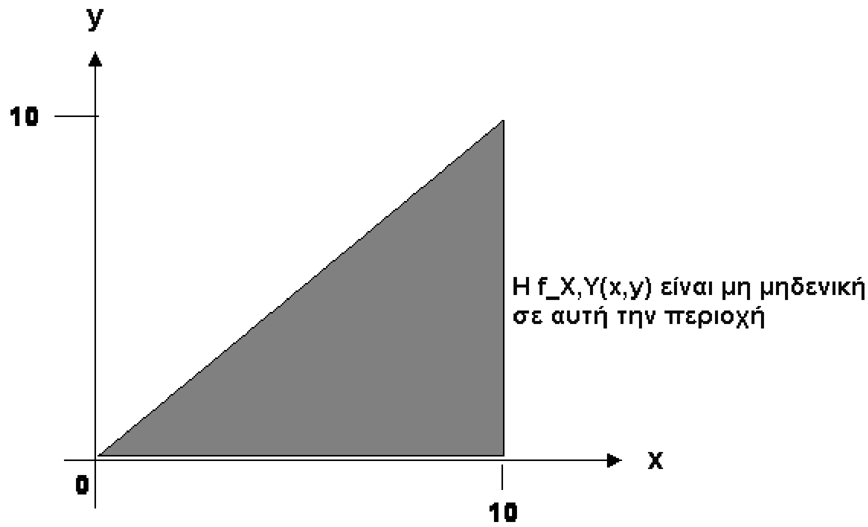
$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2Qx^2y}{Qx^4} = \frac{2y}{x^2}$$

ή

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{2y}{x^2}\ , & 0 \le x \le 10,\ 0 \le y \le x \\ 0\ , & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Έστω A το γεγονός ότι η πειραματική τιμή της X είναι 6, και B το γεγονός ότι η πειραματική τιμή της X είναι 8. Τότε, θα είναι:

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$$



Σχήμα 4: Η γρ. παράσταση της $f_{X,Y}(x,y)$

Τώρα, για να βρούμε την πυκνότητα της Y, θέτουμε ως προϋπόθεση ότι είτε το γεγονός A είτε το B συμβαίνει. Άρα, θα πάρουμε:

$$f_Y(y) = f_{Y|A}(y \mid A) \times P(A) + f_{Y|B}(y \mid B) \times P(B) = f_{Y|X}(y \mid 6) \times \frac{1}{2} + f_{Y|X}(y \mid 8) \times \frac{1}{2}$$

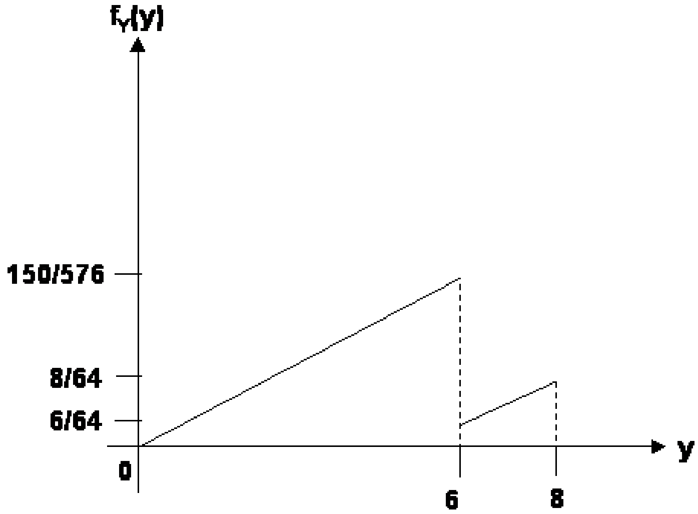
Όμως, από το τύπο του $f_{Y|X}(y \mid x)$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y \mid 6) &= \begin{cases} \dfrac{y}{18}, & 0 \le y \le 6 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \\ f_{Y|X}(y \mid 8) &= \begin{cases} \dfrac{y}{32}, & 0 \le y \le 8 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \end{aligned}$$

Τελικώς, από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{25y}{576}, & 0 \le y \le 6 \\ \dfrac{y}{64}, & 6 < y \le 8 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της $f_Y(y)$ φαίνεται στο σχήμα 5:



Σχήμα 5: Η γρ. παράσταση της $f_Y(y)$

Άσκηση 6. Έστω ότι G δηλώνει το γεγονός ότι ο Γιώργος έχει μια καλή ημέρα και έστω B το γεγονός ότι ο Γιώργος έχει μια κακή μέρα. Μας δίδεται ότι: $P(G) = P(B) = 0,5$. Έστω ότι T είναι ο χρόνος που χρειάζεται ώστε ο Γιώργος να μαγειρέψει ένα σουφλέ έτσι ώστε η $f_{T|G}$ να είναι ομοιόμορφη μεταξύ του 1/2 και του 1 και η $f_{T|B}$ να είναι ομοιόμορφη μεταξύ του 1/2 και του 3/2. Πρέπει να βρούμε την πιθανότητα $P(B \mid T \leq 3/4)$. Χρησιμοποιώντας το κανόνα του Bayes έχουμε:

$$P(B \mid T \leq 3/4) = \frac{P(T \leq 3/4 \mid B)\ P(B)}{P(T \leq 3/4)} = \frac{P(T \leq 3/4 \mid B)\ P(B)}{P(T \leq 3/4 \mid B)\ P(B) + P(T \leq 3/4 \mid G)\ P(G)}$$

Αποτιμώντας την παραπάνω έκφραση παίρνουμε:

$$P(B \mid T \leq 3/4) = \frac{(\frac{1}{4})(\frac{1}{2})}{(\frac{1}{4})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} = \frac{1}{3}$$