

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2005
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων:
Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Ημερομηνία Ανάθεσης: 12/12/2005

Ημερομηνία Παράδοσης: 21/12/2005

Άσκηση 1. Έστω X μικτή τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) που εκφράζει τον αριθμό των ωρών που αφιερώνει κάποιος φοιτητής κάθε εβδομάδα στο ΗΥ-217. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) της X είναι:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \frac{1+x}{8} & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2} & 1 \leq x < 2, \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{8} & 2 \leq x < 4, \\ 1 & x \geq 4. \end{cases}$$

Δώστε τη γραφική παράσταση της $F_X(x)$. Βρείτε την πιθανότητα ότι ο φοιτητής

- (α) αφιερώνει ακριβώς 2 ώρες
- (β) αφιερώνει περισσότερες από 2 ώρες
- (γ) αφιερώνει λιγότερες από 2 ώρες
- (δ) αφιερώνει ακριβώς 3 ώρες
- (ε) αφιερώνει περισσότερη από 1/2 αλλά λιγότερες από 3 ώρες
- (στ) αφιερώνει περισσότερες από 2 ώρες δεδομένου ότι πράγματι ασχολείται με το μάθημα, δηλ. $P(X > 2 | X > 0)$.
- (ζ) Βρείτε την μέση τιμή της X , $E[X]$.

Άσκηση 2. Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.), τη μέση τιμή και τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X η οποία έχει αθροιστική συνάρτηση κατανομής:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a^3}{x^3} & x \geq a, \\ 0 & x < a, \end{cases}$$

όπου a είναι θετική σταθερά.

Άσκηση 3. Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[0, 1]$ και έστω Y εκθετικά κατανομημένη τ.μ. με παράμετρο λ .

- (α) Βρείτε την πιθανότητα $P(X \geq E[X])$.
- (β) Δεδομένου του γεγονότος $A = \{X \geq t\}$, βρείτε την υπό συνθήκη σ.π.π., $f_{Y/A}(y)$, της τ.μ. $Y = X - t$.
- (γ) Βρείτε την πιθανότητα $P(Y \geq E[Y])$.
- (δ) Δεδομένου του γεγονότος $\{Y \geq t\}$, βρείτε την υπό συνθήκη σ.π.π. της τ.μ. $Y - t$.

Άσκηση 4. Ο Κώστας και η Μαρία συναγωνίζονται ποιος από τους δύο θα ρίξει πιο μακριά το φρίσμπι. Η απόσταση X (σε μέτρα) που το ρίχνει ο Κώστας ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 100]$, ενώ η απόσταση Y που το ρίχνει η Μαρία ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1/60$.

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι ο Κώστας θα ρίξει το φρίσμπι στα 75 μέτρα;
- (β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η Μαρία θα το ρίξει σε απόσταση μεγαλύτερη των 100 μέτρων;
- (γ) Ποιες είναι οι μέσες αποστάσεις που το ρίχνουν ο Κώστας και η Μαρία;
- (δ) Ποιος από τους δύο φίλους είναι πιο πιθανό να ρίξει πιο μακριά το φρίσμπι; Βοήθεια: Βρείτε την από κοινού σ.π.π. των X και Y . Κατόπιν, αρκεί να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X > Y)$.
- (ε) Δεδομένου ότι ο Κώστας στέλνει το φρίσμπι στα 75 μέτρα, ποια είναι η δεσμευμένη σ.π.π. της απόστασης ρίψης της Μαρίας;
- (στ) Έστω $W = Y - X$ η επιπλέον απόσταση που στέλνει το φρίσμπι η Μαρία σε σχέση με τον Κώστα. Βρείτε τη σ.π.π. της W .

Άσκηση 5. Οι συντεταγμένες X και Y ενός θαμμένου θησαυρού έχουν την εξής από κοινού σ.π.π.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} Qx^2y & 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου Q είναι μία σταθερά. Ο Ιντιάνα Τζόουνς βρίσκει το κομμάτι ενός χάρτη του θησαυρού. Δυστυχώς είναι τόσο αγνή η γραφή που η μόνη πληροφορία που μπορούμε να πάρουμε είναι ότι η συντεταγμένη X του θησαυρού είναι είτε 6 είτε 8, με ίση πιθανότητα. Δεδομένης αυτής της πληροφορίας και χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας, βρείτε τη σ.π.π. της Y .

Άσκηση 6. Ο Γιώργος είναι φαντάρος μάγειρας στο στρατό και έχει τις καλές και τις κακές του μέρες με ίδιες πιθανότητες. Στις καλές μέρες, ο χρόνος (σε ώρες) που του παίρνει να μαγειρέψει ακολουθεί σ.π.π.

$$f_G(g) = \begin{cases} 2 & 1/2 < g \leq 1, \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

ενώ στις κακές του μέρες, ο χρόνος ακολουθεί σ.π.π.

$$f_B(b) = \begin{cases} 1 & 1/2 < b \leq 3/2, \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes, βρείτε τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι σήμερα ήταν μία κακή μέρα, δεδομένου ότι ο Γιώργος μαγείρεψε σε λιγότερο από 45 λεπτά.