ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2005
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 16/11/2005 Ημερομηνία Παράδοσης: 23/11/2005

Άσκηση 1. Έστω A το γεγονός ότι το δείγμα περιλαμβάνει τουλάχιστον ένα ελαττωματικό εξάρτημα.

(α) Όταν τα εξαρτήματα επιλέγονται με επανάθεση, η πιθανότητα ότι το δείγμα περιλαμβάνει 0 ελαττωματικά εξαρτήματα είναι ίση με:

$$P(A^c) = \left(\frac{N-K}{N}\right)^M$$

Επομένως, η πιθανότητα ότι το δείγμα περιλαμβάνει τουλάχιστον ένα ελαττωματικό εξάρτημα θα ισούται με:

$$P(A) = 1 - \left(\frac{N-K}{N}\right)^M$$

(β) Σε αυτή την περίπτωση, τα εξαρτήματα επιλέγονται χωρίς επανάθεση. Αν $M > N-K$, κάθε δείγμα μεγέθους M περιέχει τουλάχιστον ένα ελαττωματικό εξάρτημα και άρα θα έχουμε:

$$P(A) = 1$$

Αλλιώς, θα έχουμε $M <= N-K$. Οπότε, θα υπάρχουν $\binom{N}{M}$ τρόποι επιλογής ενός δείγματος με M εξαρτήματα από ένα κουτί των N εξαρτημάτων. Όμως, υπάρχουν $\binom{N-K}{M}$ τρόποι επιλογής ενός δείγματος με M εξαρτήματα από ένα σύνολο από $N-K$ μη ελαττωματικά εξαρτήματα. Επομένως, η πιθανότητα ότι το δείγμα περιλαμβάνει 0 ελαττωματικά εξαρτήματα θα είναι:

$$P(A^c) = \frac{\binom{N-K}{M}}{\binom{N}{M}}$$

Συνεπώς, θα έχουμε:

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{N-K}{M}}{\binom{N}{M}}$$

Άσκηση 2.

(α) Υπάρχει ένα σύνολο από $\binom{52}{13}$ ισοπίθανα μοιράσματα που ο πρώτος παίκτης μπορεί να πάρει. Μόνο ένα από αυτά τα μοιράσματα αποτελείται από χαρτιά που είναι όλα σπαθιά. Επομένως, η πιθανότητα όλα τα χαρτιά του πρώτου παίκτη να είναι σπαθιά θα είναι ίση με: $\boxed{\frac{1}{\binom{52}{13}}}$

(β) Τα τέσσερα γεγονότα: {όλα τα χαρτιά του πρώτου παίκτη είναι σπαθιά, όλα τα χαρτιά του δεύτερου παίκτη είναι σπαθιά, όλα τα χαρτιά του τρίτου παίκτη είναι σπαθιά, όλα τα χαρτιά του τέταρτου παίκτη είναι σπαθιά είναι} είναι ξένα μεταξύ τους. Επομένως, μπορούμε να προσθέσουμε την πιθανότητα του καθενός για να πάρουμε το τελικό αποτέλεσμα. Κάθε γεγονός έχει πιθανότητα $\frac{1}{\binom{52}{13}}$, οπότε το τελικό αποτέλεσμα θα είναι: $\boxed{\frac{4}{\binom{52}{13}}}$

(γ) Τα γεγονότα A και B δεν είναι ανεξάρτητα. Αν γνωρίζουμε το γεγονός B, δηλαδή ότι ο πρώτος παίκτης έχει πάρει ρήγα-κούπα, τότε ξέρουμε ότι ο πρώτος παίκτης δεν μπορεί να πάρει και τα 13 σπαθιά. Με άλλα λόγια, η πιθανότητα του A δεδομένου του B είναι: $P(A \mid B) = 0$ και δεν είναι ίση με την πιθανότητα του A: $P(A) = \frac{1}{\binom{52}{13}}$. Επιπλέον, τα γεγονότα A και B είναι ξένα μεταξύ τους. Εν γένει, όταν δύο γεγονότα μη μηδενικής πιθανότητας είναι ξένα μεταξύ τους, τότε δεν μπορούν να είναι ανεξάρτητα.

(δ) Μπορούμε να δείξουμε ότι τα δύο γεγονότα είναι ανεξάρτητα αποδεικνύοντας ότι: $P(B \mid A) = P(B)$. Σημειώστε ότι: $P(B \mid A) = 1/4$ αφού δεδομένου ότι ο πρώτος παίκτης έχει όλα τα 13 χαρτιά του ίδιου σχήματος, αυτό το σχήμα θα είναι: είτε κούπα, είτε σπαθί, είτε μπαστούνι είτε καρό. Κάθε σχήμα είναι ισοπίθανο με πιθανότητα: $1/4$ και άρα ο πρώτος παίκτης θα έχει πάρει το ρήγα-κούπα με πιθανότητα $1/4$. Επομένως, είναι: $P(B \mid A) = P(B)$ και συμπεραίνουμε ότι τα δύο γεγονότα είναι ανεξάρτητα. Επίσης, σημειώστε ότι τα γεγονότα δεν είναι ξένα μεταξύ τους αφού η τομή τους δεν είναι κενή – είναι το γεγονός ότι ο πρώτος παίκτης παίρνει όλες τις κούπες.

Άσκηση 3. Ορίζουμε τα ακόλουθα γεγονότα:

$$\begin{aligned} A &= \text{Δοκιμάσαμε 20 καλά αυτοκίνητα από σύνολο 100, } K \text{ από τα οποία είναι ελαττωματικά} \\ K &= \text{Ο αριθμός των αυτοκινήτων που είναι ελαττωματικά, ο οποίος γνωρίζουμε ότι παίρνει} \\ &\quad\ \text{τιμές από το σύνολο}\{0, 1, \ldots, 9\} \end{aligned}$$

Η άσκηση ζητάει να βρεθεί η πιθανότητα $P(K = 0 \mid A)$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes' προκύπτει η ακόλουθη ισότητα:

$$P(K = 0 \mid A) = \frac{P(A \mid K = 0)P(K = 0)}{\sum_{i=0}^{9} P(A \mid K = i)P(K = i)}$$

Η $P(A \mid K = i)$ είναι η πιθανότητα να δοκιμάσουμε 20 καλά αυτοκίνητα δεδομένου ότι υπάρχουν i ελαττωματικά, η οποία είναι ίση με:

$$P(A \mid K = i) = \frac{\binom{i}{0}\binom{100-i}{20}}{\binom{100}{20}} = \frac{(100-i)!80!}{(80-i)!100!}$$

Εφόσον είναι $P(K = i) = 0.1$ για κάθε i και $P(A \mid K = 0) = 1$, θα έχουμε τελικά ότι:

$$P(K = 0 \mid A) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{9} P(A \mid K = i)}$$

Άσκηση 4. Έστω X ο αριθμός των κεφαλών που προκύπτουν από τις 4 ρίψεις του νομίσματος. Η X θα είναι μια δυωνυμική τυχαία μεταβλητή, η οποία θα έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ίση με:

$$p_X(k) = \binom{4}{k} p^k (1-p)^{4-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Σημειώστε ότι αυτή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αναπαριστά τη *σ.π.π* για τον αριθμό των ευρώ που ο Ανδρέας κερδίζει αν ακολουθήσει την επιλογή (α).
Η μέση τιμή μιας δυωνυμικής τυχαίας μεταβλητής ισούται με np, όπου n είναι ο αριθμός των προσπαθειών και p είναι η πιθανότητα επιτυχίας. Επομένως, έχουμε ότι:

$$E[X] = 1.6$$

Τώρα ορίζουμε την νέα τυχαία μεταβλητή Y, η οποία αναπαριστά των αριθμό των ευρώ που ο Ανδρέας θα κερδίσει αν ακολουθήσει την επιλογή (β). Θα ισχύει ότι:

$$Y = X^2 - 1.5X$$

Τότε θα έχουμε:

$$E[Y] = E[X^2 - 1.5X] = E[X^2] - 1.5E[X] = np(1-p) + (np)^2 - 1.5(np) = 1.12$$

Επειδή είναι $E[X] > E[Y]$, προφανώς η επιλογή (α) θα είναι πιο επικερδής για τον Ανδρέα.

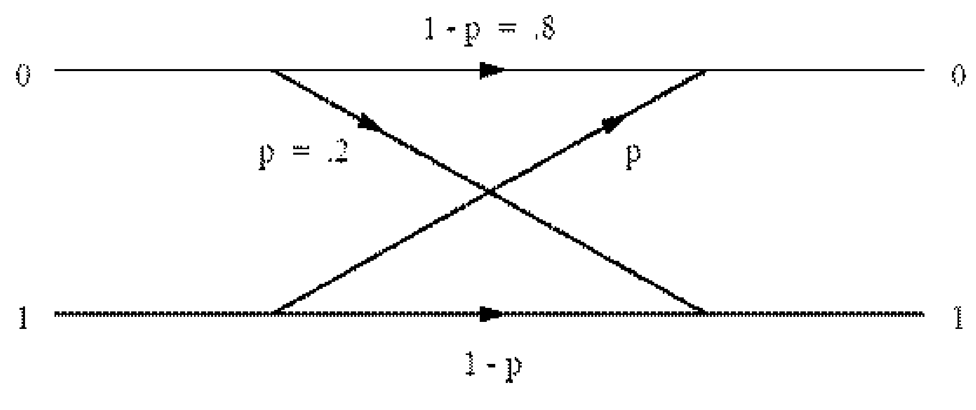
Σημείωση: Υπάρχει μια πιο επίπονη λύση για την άσκηση, υπολογίζοντας όλες τις τιμές της $\sigma.\pi.\pi$ της X για όλα τις τιμές του x και έπειτα βρίσκοντας τη $\sigma.\pi.\pi$ της Y. Το κάνουμε αυτό για να δείξουμε ότι παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Μετά τον υπολογισμό θα έχουμε:

$p_X(0) = 0.1296$; $p_X(1) = 0.3456$; $p_X(2) = 0.3456$; $p_X(3) = 0.1536$; $p_X(4) = 0.0256$
$p_Y(0) = 0.1296$; $p_Y(-0.5) = 0.3456$; $p_Y(1) = 0.3456$; $p_Y(4.5) = 0.1536$; $p_Y(10) = 0.0256$

Υπολογίζοντας τις μέσες τιμές των X, Y προκύπτει και πάλι ότι:

$$E[X] = 1.6 > E[Y] = 1.12$$

Άσκηση 5. Εξετάζοντας το συμμετρικό δυαδικό τηλεπικοινωνιακό κανάλι, παρατηρούμε ότι η πιθανότητα να γίνει ένα απλό λάθος μετάδοσης για οποιαδήποτε σύμβολο είναι: $p = 0.2$ ανεξάρτητα αν το σύμβολο ήταν 0 ή 1. Με βάση αυτή την παρατήρηση, σημειώνουμε ότι η τυχαία μεταβλητή R είναι δυωνυμική τ.μ με $n = 40, p = 0.2$.



Σχήμα 1: Δενδρική αναπαράσταση άσκησης 5

(α) Η συνάρτηση πιθανότητας της R θα είναι:

$$P_R(e_0) = \binom{40}{e_0}(0.2)^{e_0}(0.8)^{40-e_0}$$

(β) Η πιθανότητα σωστής μετάδοσης τουλάχιστον 38 συμβόλων θα ισούται με:

$$\begin{aligned} P(e_0 < 3) &= P(e_0 = 2) + P(e_0 = 1) + P(e_0 = 0) \\ &= \binom{40}{2}(0.2)^2(0.8)^{38} + \binom{40}{1}(0.2)(0.8)^{39} + \binom{40}{0}(0.8)^{40} \\ &= 0.00794 \end{aligned}$$

(γ) Σε ένα λεπτό, 6×10^7 σύμβολα θα έχουν μεταδοθεί και θα έχουμε ότι: $P(\text{τουλάχιστον ένα λάθος}) = P(e_0 > 0)$. Συνεπώς, θα είναι:

$$\begin{aligned} P(e_0 > 0) &= 1 - P(e_0 = 0) \\ &= 1 - \binom{n}{0}(1-p)^{n-0} \\ &= 1 - \binom{6 \times 10^7}{0}(1 - 5 \times 10^{-8})^{6 \times 10^7 - 0} \\ &= 1 - 0.0498 = 0.95022 \end{aligned}$$

Άσκηση 6. Πρέπει να σημειώσουμε ότι οι συναρτήσεις ολικής πιθανότητας των L_1 και L_2 είναι οι ίδιες. Η πιθανότητα η ομάδα του Εργοτέλη να χάσει l_1 φορές πριν από μια νική ισούται με:

$$(1-p)^{l_1}p$$

Επομένως, θα έχουμε:

$$p_{L_1}(l_1) = (1-p)^{l_1}p \text{ για } l_1 = 0, 1, 2, \ldots$$

και

$$p_{L_2}(l_2) = (1-p)^{l_2}p \text{ για } l_2 = 0, 1, 2, \ldots$$

Εφόσον οι L_1 και L_2 είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, η κοινή συνάρτηση του ολικής πιθανότητας μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$p_{L_1,L_2} = p_{L_1}(l_1)p_{L_2}(l_2) = (1-p)^{l_1+l_2}p^2 \text{ για } l_1, l_2 = 0, 1, 2, \ldots$$

Άσκηση 7.

(α) Από την κοινή *σ.π.*, υπάρχουν 6 ζευγάρια συντεταγμένων (x, y) με μη μηδενική πιθανότητα εμφάνισης. Αυτά τα ζευγάρια είναι τα: $(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (4,1)$ και $(4,3)$. Η πιθανότητα ενός ζευγαριού είναι ανάλογη του γινομένου των x και y συντεταγμένων του ζευγαριού. Επειδή η πιθανότητα ολόκληρου του δειγματικού χώρου πρέπει να είναι ίση με 1, θα πρέπει:

$$(1 \cdot 1)c + (1 \cdot 3)c + (2 \cdot 1)c + (2 \cdot 3)c + (4 \cdot 1)c + (4 \cdot 3)c = 1$$

Λύνοντας ως προς c παίρνουμε: $c = \boxed{\frac{1}{28}}$

(β) Υπάρχουν 3 δειγματικά σημεία για τα οποία $y < x$. Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$P(Y < X) = P(\{(2,1)\}) + P(\{(4,1)\}) + P(\{(4,3)\}) = \frac{2 \cdot 1}{28} + \frac{4 \cdot 1}{28} + \frac{4 \cdot 3}{28} = \boxed{\frac{18}{28}}$$

(γ) Υπάρχουν 2 δειγματικά σημεία για τα οποία $y > x$. Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$P(Y > X) = P(\{(1,3)\}) + P(\{(2,3)\}) = \frac{1 \cdot 3}{28} + \frac{2 \cdot 3}{28} = \boxed{\frac{9}{28}}$$

(δ) Υπάρχει 1 δειγματικό σημείο για το οποίο $y = x$. Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$P(Y = X) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1 \cdot 1}{28} = \boxed{\frac{1}{28}}$$

Παρατηρήστε ότι, χρησιμοποιώντας τα δύο παραπάνω μέρη της άσκησης, προκύπτει η αναμενόμενη ισότητα:

$$P(Y < X) + P(Y > X) + P(Y = X) = \frac{18}{28} + \frac{9}{28} + \frac{1}{28} = 1$$

(ε) Υπάρχουν 3 δειγματικά σημεία για τα οποία $y = 3$. Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$P(Y = 3) = P(\{(1,3)\}) + P(\{(2,3)\}) + P(\{(4,3)\}) = \frac{1 \cdot 3}{28} + \frac{2 \cdot 3}{28} + \frac{4 \cdot 3}{28} = \boxed{\frac{21}{28}}$$

(στ) Γενικά, για δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές X και Y για τις οποίες έχει οριστεί κοινή συνάρτηση πιθανότητας, έχουμε:

$$p_X(x) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y) \qquad \text{και} \qquad p_Y(y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y)$$

Σε αυτό το πρόβλημα, ο αριθμός των (X,Y) ζευγαριών είναι αρκετά μικρός, οπότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τις (οριακές) *σ.π.* με απαρίθμηση. Για παράδειγμα,

$$p_X(2) = P(\{(2,1)\}) + P(\{(2,3)\}) = \frac{8}{28}$$

Συνολικά, θα έχουμε:

$$p_X(x) = \begin{cases} 4/28 & , x = 1; \\ 8/28 & , x = 2; \\ 16/28 & , x = 4; \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 1/7 & , x = 1; \\ 2/27 & , x = 2; \\ 4/27 & , x = 4; \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$p_Y(y) = \begin{cases} 7/28 & , y = 1; \\ 21/28 & , y = 3; \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 1/4 & , y = 1; \\ 3/4 & , y = 3; \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(ζ) Γενικά, η αναμενόμενη τιμή οποιασδήποτε διακριτής τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$E[X] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x p_X(x)$$

Για αυτό το πρόβλημα, θα έχουμε:

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{7} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 4 \cdot \frac{4}{7} = \boxed{3}$$

και

$$E[Y] = 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{3}{4} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

(η) Η διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής X μπορεί να υπολογισθεί ως $E[X^2] - E[X]^2$ ή ως $E[(X - E[X])^2]$. Χρησιμοποιώντας τη δεύτερη μέθοδο προκύπτει ότι:

$$var(X) = (1-3)^2 \cdot \frac{1}{7} + (2-3)^2 \cdot \frac{2}{7} + (4-3)^2 \cdot \frac{4}{7} = \boxed{\frac{10}{7}}$$

και

$$var(Y) = (1 - \frac{5}{2})^2 \cdot \frac{1}{4} + (3 - \frac{5}{2})^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} + \frac{3}{16} = \boxed{\frac{3}{4}}$$