

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2005
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων:
Συνδυαστική Ανάλυση και Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Ημερομηνία Ανάθεσης: 16/11/2005

Ημερομηνία Παράδοσης: 23/11/2005

Άσκηση 1. Ένα κουτί περιέχει N εξαρτήματα εκ των οποίων τα K είναι ελαττωματικά. Επιλέγουμε τυχαία ένα δείγμα από M εξαρτήματα. Ποια είναι η πιθανότητα ότι το δείγμα περιέχει τουλάχιστον ένα ελαττωματικό εξάρτημα εάν η δειγματοληψία έχει γίνει (α) με επανάθεση, (β) χωρίς επανάθεση.

Βοήθεια: Υπολογίστε την πιθανότητα το δείγμα να περιέχει μόνο καλά εξαρτήματα. Για το (β), θεωρείστε τις περιπτώσεις $M > N - K$ και $M \leq N - K$.

Άσκηση 2. Μία τράπουλα με 52 χαρτιά μοιράζεται μεταξύ 4 παικτών όπου καθένας παίρνει 13 χαρτιά.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα ο πρώτος παίκτης να πάρει και τα 13 σπαθιά της τράπουλας;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα *κάποιος* παίκτης να πάρει και τα 13 σπαθιά της τράπουλας;

(γ) Θεωρείστε τα ακόλουθα δύο γεγονότα:

A: ο πρώτος παίκτης παίρνει και τα 13 σπαθιά της τράπουλας

B: ο πρώτος παίκτης παίρνει τον ρήγα-κούπα

Είναι τα δύο γεγονότα ανεξάρτητα; Είναι ξένα μεταξύ τους;

(δ) Θεωρείστε τα ακόλουθα δύο γεγονότα:

A: όλα τα χαρτιά του πρώτου παίκτη έχουν το ίδιο χρώμα και σχήμα

B: ο πρώτος παίκτης παίρνει τον ρήγα-κούπα

Είναι τα δύο γεγονότα ανεξάρτητα;

Άσκηση 3. Μία αντιπροσωπία μεταχειρισμένων αυτοκινήτων έχει 100 αυτοκίνητα τα οποία εξωτερικά φαίνονται να είναι σε καλή κατάσταση. Όμως K από αυτά είναι ελαττωματικά, όπου το K γνωρίζουμε ότι παίρνει τις τιμές από 0 μέχρι 9 με ίση πιθανότητα. Δοκιμάζουμε στην τύχη 20 διαφορετικά αυτοκίνητα και διαπιστώνουμε προς ευχάριστη έκπληξη ότι κανένα δεν είναι ελαττωματικό. Δεδομένου αυτού του γεγονότος, δώστε τον τύπο που υπολογίζει την πιθανότητα $P(K = 0)$. (Μην κάνετε αριθμητικούς υπολογισμούς).

Άσκηση 4. Ο Χρήστος και ο Ανδρέας παίζουν το εξής παιχνίδι με ένα κέρμα για το οποίο η πιθανότητα να έρθει κεφαλή είναι ίση με 0.4. Ο Χρήστος ρίχνει το κέρμα 4 φορές. Πριν τις ρίψεις, ο Ανδρέας έχει δύο επιλογές: (α) να κερδίσει, σε ευρώ, τον αριθμό των κεφαλών που έρχονται στις 4 ρίψεις του κέρματος, ή (β) να κερδίσει, σε ευρώ, το τετράγωνο του αριθμού των κεφαλών μείον 1.5 φορές τον αριθμό των κεφαλών. Αρνητικό νούμερο ως "κέρδος" σημαίνει ότι ο Ανδρέας θα πρέπει να πληρώσει στον Χρήστο το αντίστοιχο ποσό. Ποια επιλογή πρέπει να ακολουθήσει ο Ανδρέας, δηλαδή, ποια επιλογή έχει το μεγαλύτερο αναμενόμενο κέρδος;

Άσκηση 5. Θεωρείστε το λεγόμενο συμμετρικό δυαδικό τηλεπικοινωνιακό κανάλι που περιγράφεται από τις ακόλουθες πιθανότητες μετάβασης:

$$p_{00} = p_{11} = 1 - p = 0.8$$

$$p_{01} = p_{10} = p = 0.2,$$

όπου p_{ij} ($i, j = 1, 2$) είναι η δεσμευμένη πιθανότητα λήψης του συμβόλου i δεδομένου ότι έχει σταλεί το σύμβολο j . Η είσοδος στο κανάλι αποτελείται από μία ακολουθία συμβόλων 0 και 1, τα οποία είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Έστω R η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το πλήθος των σφαλμάτων κατά τη μετάδοση 5 λέξεων που αποτελούνται από 8 σύμβολα η κάθε μία.

- (α) Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας της R ;
- (β) Ποια είναι η πιθανότητα σωστής μετάδοσης τουλάχιστον 38 συμβόλων;
- (γ) Έστω $p = 5 \times 10^{-8}$ και υποθέστε ότι μεταδίδονται 10^6 σύμβολα το δευτερόλεπτο. Ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον ενός σφάλματος μετάδοσης το δευτερόλεπτο;

Άσκηση 6. Η ομάδα μπάσκετ του Εργοτέλη κερδίζει τα παιχνίδια της με πιθανότητα p και τα χάνει με πιθανότητα $1-p$. Η απόδοσή της σε κάθε παιχνίδι είναι ανεξάρτητη της απόδοσής της σε οποιοδήποτε άλλο παιχνίδι. Έστω L_1 ο αριθμός των ηττών πριν την πρώτη νίκη και L_2 ο αριθμός των ηττών μετά την πρώτη νίκη και πριν τη δεύτερη νίκη. Βρείτε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) των τυχαίων μεταβλητών L_1 και L_2 .

Άσκηση 7. Οι τ.μ. X και Y έχουν την από κοινού σ.π.

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cxy & \text{αν } x \in \{1, 2, 4\} \text{ και } y \in \{1, 2\} \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- (α) Ποια είναι η τιμή της σταθεράς c ;
- (β) Ποια είναι η $P(Y < X)$;
- (γ) Ποια είναι η $P(Y > X)$;
- (δ) Ποια είναι η $P(Y = X)$;
- (ε) Ποια είναι η $P(Y = 3)$;
- (στ) Βρείτε τις περιθωριακές σ.π. των X και Y .
- (ζ) Βρείτε τις μέσες τιμές των X και Y .
- (η) Βρείτε τις διασπορές των X και Y .