ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2005
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 27/10/2005 Ημερομηνία Παράδοσης: 7/11/2005

Άσκηση 1. Το κουτί περιέχει 15 κόκκινες μπάλες και 5 άσπρες μπάλες (συνολικά 20 μπάλες).

(α) Έστω $P(A_1)$ η πιθανότητα η πρώτη μπάλα να είναι άσπρη. Τότε θα ισχύει ότι:

$$P(A_1) = \frac{5}{20}$$

Δεδομένου ότι η πρώτη μπάλα είναι άσπρη, τώρα θα υπάρχουν 19 μπάλες στο κουτί, από τις οποίες οι 4 μόνο θα είναι άσπρες. Η πιθανότητα ότι και η δεύτερη μπάλα που επιλέγεται τυχαία είναι άσπρη είναι η ακόλουθη:

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{4}{19}$$

Χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιαστικό νόμο, η πιθανότητα ότι και οι δύο μπάλες που επιλέγονται τυχαία είναι άσπρες θα είναι ίση με:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_1) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} = \frac{1}{19}$$

(β) Έστω $P(K_1)$ η πιθανότητα η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη. Τότε θα ισχύει ότι:

$$P(K_1) = \frac{15}{20}$$

Δεδομένου ότι η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη, τώρα θα υπάρχουν 19 μπάλες στο κουτί, από τις οποίες οι 5 θα είναι άσπρες. Η πιθανότητα ότι η δεύτερη μπάλα που επιλέγεται τυχαία είναι άσπρη είναι η ακόλουθη:

$$P(A_2 \mid K_1) = \frac{5}{19}$$

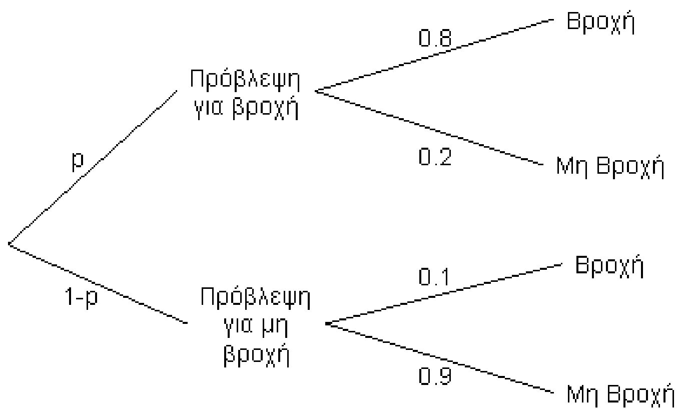
Χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιαστικό νόμο, η πιθανότητα ότι η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη και η δεύτερη άσπρη θα είναι ίση με:

$$P(K_1 \cap A_2) = P(A_2 \mid K_1) \cdot P(K_1) = \frac{5}{19} \cdot \frac{15}{20} = \frac{15}{76}$$

Άσκηση 2.

(α) Η δενδρική αναπαράσταση φαίνεται στο σχήμα 1. Έστω A το γεγονός ότι υπήρξε Πρόβλεψη για βροχή. Έστω B το γεγονός ότι έβρεξε. Έστω p η πιθανότητα ότι η πρόβλεψη είναι για βροχή. Αν έχουμε χειμώνα, τότε είναι $p = 0.7$, οπότε θα έχουμε ότι:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{0.8 \cdot 0.7}{0.8 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.3} = \frac{56}{59}$$



Σχήμα 1: Δενδρική αναπαράσταση ζητήματος (α)

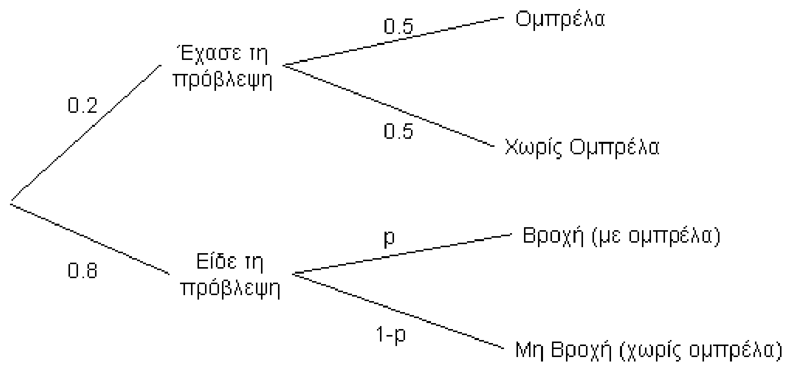
Αν έχουμε καλοκαίρι, τότε είναι $p = 0.2$, οπότε θα έχουμε ότι:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{0.8 \cdot 0.2}{0.8 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.8} = \frac{2}{3}$$

(β) Έστω C το γεγονός ότι ο Νίκος κρατάει ομπρέλα και D το γεγονός ότι υπάρχει Πρόβλεψη για μη βροχή. Το δενδρικό διάγραμμα σε αυτή την περίπτωση φαίνεται στο σχήμα 2. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(D) &= 1 - p \\ P(C) &= 0.8 \cdot p + 0.2 \cdot 0.5 = 0.8 \cdot p + 0.1 \\ P(C \mid D) &= 0.8 \cdot 0 + 0.2 \cdot 0.5 = 0.1 \end{aligned}$$

Επομένως, θα ισχύει $P(C) = P(C \mid D)$ αν και μόνο αν $p = 0$. Όμως, το p μπορεί να είναι είτε 0.7 είτε 0.2. Συνεπώς, τα γεγονότα C και D δεν θα είναι ποτέ ανεξάρτητα, όποια και αν είναι η εποχή.



Σχήμα 2: Δενδρική αναπαράσταση ζητήματος (β)

(γ) Η πιθανότητα να βρέχει αν ο Νίκος έχασε τη πρόβλεψη θα ισούται με:

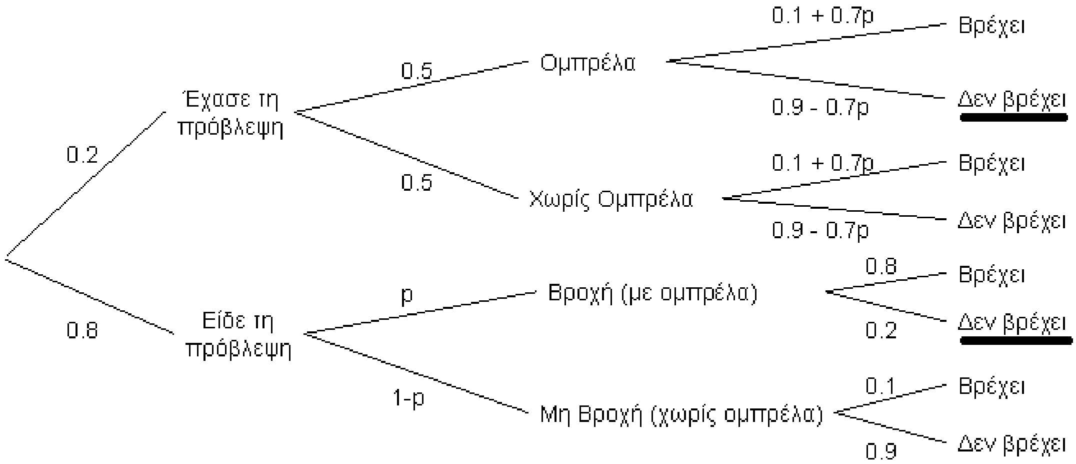
$$P(\text{βρέχει} \mid \text{έχασε τη πρόβλεψη}) = 0.8 \cdot p + 0.1 \cdot (1-p) = 0.1 + 0.7 \cdot p$$

Επεκτείνουμε το δενδρικό διάγραμμα της εικόνας 2 (που αντιστοιχεί στο (β) μέρος της άσκησης) στο δενδρικό διάγραμμα του σχήματος 3. Επομένως, δεδομένου ότι ο Νίκος κρατάει ομπρέλα και ότι δεν βρέχει, εξετάζουμε τις 2 υπογραμμισμένες περιπτώσεις της εικόνας 3 και έχουμε:

$$P = P(\text{είδε πρόβλεψη} \mid \text{ομπρέλα} \cap \text{δεν βρέχει}) = \frac{0.8 \cdot p \cdot 0.2}{0.8 \cdot p \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.5 \cdot (0.9 - 0.7 \cdot p)}$$

Αν έχουμε φθινόπωρο ή χειμώνα, είναι $p = 0.7$, οπότε θα έχουμε $\boxed{P = \frac{112}{153}}$

Αν έχουμε άνοιξη ή καλοκαίρι, είναι $p = 0.2$, οπότε θα έχουμε $\boxed{P = \frac{8}{27}}$



Σχήμα 3: Δενδρική αναπαράσταση ζητήματος (γ)

Άσκηση 3.

(α) Τα κομμάτια έχουν ίση πιθανότητα να είναι καινούρια ή παλιά. Έστω A το γεγονός ότι τα επιλεγμένα κομμάτια είναι ελαττωματικά. Έστω B_1 το γεγονός ότι επιλέγονται 2 παλιά κομμάτια και B_2 το γεγονός ότι επιλέγονται 2 νέα κομμάτια. Υπάρχουν $\binom{1000}{2}$ τρόποι, με ίση πιθανότητα, επιλογής δύο παλιών κομματιών από ένα σύνολο από 1000 παλιά κομμάτια. Εφόσον 15% των παλιών κομματιών είναι ελαττωματικά, υπάρχουν 150 ελαττωματικά παλιά κομμάτια. Υπάρχουν $\binom{150}{2}$ τρόποι επιλογής 2 ελαττωματικών παλιών κομματιών από ένα σύνολο από 150 ελαττωματικά παλιά κομμάτια. Επομένως, θα έχουμε:

$$P(A \mid B_1) = \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}}$$

Παρομοίως, ένα 5% από τα νέα κομμάτια (75) είναι ελαττωματικά. Δεδομένου ότι 2 νέα κομμάτια επιλέγονται, θα έχουμε:

$$P(A \mid B_2) = \frac{\binom{75}{2}}{\binom{1500}{2}}$$

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{75}{2}}{\binom{1500}{2}} \end{aligned}$$

(β) Προφανώς, ψάχνουμε για την πιθανότητα $P(B_1 \mid A)$. Χρησιμοποιώντας το κανόνα του Bayes θα έχουμε:

$$\begin{aligned} P(B_1 \mid A) &= \frac{P(B_1) \cdot P(A \mid B_1)}{P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{150}{2}}{\binom{1000}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{75}{2}}{\binom{1500}{2}}} \end{aligned}$$

Άσκηση 4.

(α) $\boxed{\text{Σωστή}}$

Αν $P(A \mid B) = P(A)$, τότε τα A και B είναι ανεξάρτητα. Αν το B είναι ανεξάρτητο του A, τότε το B είναι επίσης ανεξάρτητο του A^c. Αυτό συνεπάγεται, αν λογαριάσουμε και τον ορισμό της ανεξαρτησίας, ότι:

$$P(B \mid A^c) = P(B)$$

(β) $\boxed{\text{Λάθος}}$

Εφόσον προέκυψαν 5 μόνο κεφαλές από τις 10 ρίψεις, η γνώση για μια ρίψη νομίσματος παρέχει γνώση και για τις υπόλοιπες ρίψεις νομισμάτων. Πράγμα το οποίο σημαίνει ότι τα δύο γεγονότα δεν είναι ανεξάρτητα. Με άλλα λόγια, η γνώση ότι η πρώτη ρίψη νομίσματος έφερε κεφαλή επηρεάζει τη πιθανότητα ότι η δέκατη ρίψη νομίσματος έφερε κεφαλή.

(γ) $\boxed{\text{Σωστή}}$

Εδώ όλες οι ρίψεις έφεραν κεφαλή, οπότε η γνώση για τη ρίψη ενός νομίσματος δεν παρέχει κάποια επιπρόσθετη γνώση για τη ρίψη του δέκατου νομίσματος. Επομένως, τα δύο γεγονότα είναι ανεξάρτητα.

(δ) $\boxed{\text{Λάθος}}$

Για το αριστερό μέρος της ισότητας, εφόσον τα A_i αποτελούν μια διαμέριση του χώρου, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} P(B \mid C) &= \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{P(A_i)P(B \cap C \mid A_i)}{P(C)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{P(A_i \cap B \cap C)}{P(C)} \end{aligned}$$

Όμως, από το δεύτερο μέρος της διδόμενης εξίσωσης προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} P(A_i \mid C)P(B \mid A_i) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{P(A_i \cap C)}{P(C)} \cdot \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{P(A_i \cap B \cap C)}{P(C)P(A_i)} \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τις αναπτυγμένες εκφράσεις των δύο μερών της διδόμενης εξίσωσης, η δεύτερη ισούται με την πρώτη μόνο όταν τα $A_i \cap C$ και $B \cap A_i$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα και $i = 1$ (δηλαδή το A_1 εκφράζει όλο το δειγματικό χώρο).

Άσκηση 5.

(α) $\boxed{\text{Όχι.}}$ Τα γεγονότα A και B δεν είναι ανεξάρτητα. Για να γίνει αυτό αντιληπτό, σημειώστε ότι $A \subset B$, οπότε θα είναι $P(A \cap B) = P(A)$. Η τελευταία έκφραση είναι ίση με το $P(A) \cdot P(B)$ μόνο όταν $P(B) = 1$ ή $P(A) = 0$. Όμως, στο παράδειγμά μας είναι καθαρά $P(B) < 1$ και $P(A) > 0$. Συνεπώς, είναι: $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ και άρα τα γεγονότα A και B δεν είναι ανεξάρτητα.

(β) $\boxed{\text{Ναι.}}$ Δεδομένου του γεγονότος Γ, το γεγονός A θα συμβεί αν και μόνο αν η Μαρία συναντήσει 5 ανθρώπους την δεύτερη εβδομάδα. Επομένως, είναι: $P(A \mid \Gamma) = 1/5$.
Αν η Μαρία έκανε 5 φίλους τη πρώτη εβδομάδα, είναι σίγουρη ότι θα κάνει περισσότερους από 5 φίλους συνολικά. Οπότε, θα είναι: $P(B \mid \Gamma) = 1$.
Αν το A συμβεί, τότε συμβαίνει και το B, επομένως θα ισχύει ότι:
$P(A \cap B \mid \Gamma) = P(A \mid \Gamma) = P(A \mid \Gamma) \cdot P(B \mid \Gamma)$. Συνεπώς, τα γεγονότα A και B είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα δεδομένου του γεγονότος Γ.

(γ) $\boxed{\text{Όχι.}}$ Βρήκαμε στο μέρος (β) ότι $P(A \mid \Gamma) = 1/5$ ενώ είναι: $P(A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$. Επομένως, είναι: $P(A \mid \Gamma) \neq P(A)$. Συνεπώς, τα γεγονότα A και Γ δεν είναι ανεξάρτητα.
Παρομοίως, είναι: $P(B \mid \Gamma) = 1$ ενώ είναι προφανές ότι $P(B) < 1$. Άρα, τα γεγονότα B και Γ δεν είναι και αυτά ανεξάρτητα.

(δ) Έστως F_i, όπου $(i = 1, 2, \ldots, 5)$, να εκφράζει το γεγονός ότι την πρώτη βδομάδα έγιναν i φίλοι. Παρομοίως, έστω S_i να είναι το γεγονός ότι την δεύτερη βδομάδα έγιναν i φίλοι. Έστω T_j, όπου $(j = 2, \ldots, 10)$, να εκφράζει το γεγονός ότι ο συνολικός αριθμός φίλων που έγιναν τις 2 εβδομάδες είναι j. Τότε, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} P(2 \text{ την πρώτη} \mid 6 \text{ συνολικά}) &= P(F_2 \mid T_6) \\ &= \frac{P(T_6 \mid F_2) \cdot P(F_2)}{P(T_6)} \\ &= \frac{P(S_4) \cdot P(F_2)}{\sum_{i=1}^{5} P(F_i \cap S_{6-i})} \\ &= \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}}{5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα χρησιμοποιεί τον κανόνα του Bayes, η τρίτη ισότητα χρησιμοποιεί το Ολικό Θεώρημα Πιθανοτήτων, και η τέταρτη (τελευταία) ισότητα χρησιμοποιεί το γεγονός ότι ο αριθμός των φίλων που γίνονται κάθε εβδομάδα είναι ανεξάρτητος.
Παρομοίως, προκύπτει ότι: $P(F_3 \mid T_6) = 1/5$.

(ε) Με βάση τις θεωρήσεις που έγιναν στο ερώτημα (δ) έχουμε:

$$\begin{aligned} P(F_2 \cup S_2 \mid T_6) &= P(F_2 \mid T_6) + P(S_2 \mid T_6) - P(F_2 \cap S_2 \mid T_6) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - 0 = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι πιθανότητες υπό συνθήκη ικανοποιούν όλα τα αξιώματα πιθανοτήτων. Το $P(F_2 \mid T_6) = 1/5$ είχε βρεθεί στο προηγούμενο ερώτημα. Εφόσον οι εβδομάδες είναι κατανημεμένες το ίδιο, θα ισχύει και το: $P(S_2 \mid T_6) = 1/5$.

Με τον ίδιο τρόπο θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
P(F_3 \cup S_3 \mid T_6) &= P(F_3 \mid T_6) + P(S_3 \mid T_6) - P(F_3 \cap S_3 \mid T_6) \\
&= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - P(S_3 \mid F_3 \cap T_6) \cdot P(F_3 \mid T_6) \\
&= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Σημειώστε ότι το τελευταίο αποτέλεσμα είναι λογικό, αφού υπάρχει μόνο ένας τρόπος να συναντήσεις 6 ανθρώπους συναντώντας 3 σε τουλάχιστον μια εβδομάδα, ενώ υπάρχουν 2 τρόποι να συναντήσεις 6 ανθρώπους συναντώντας 2 σε τουλάχιστον μια εβδομάδα. Επομένως, είναι λογικό που η τελευταία πιθανότητα ισούται με το μισό της προηγούμενης.