

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2005
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων:
Δεσμευμένη πιθανότητα, κανόνας του Bayes, ανεξαρτησία

Ημερομηνία Ανάθεσης: 27/10/2005

Ημερομηνία Παράδοσης: 7/11/2005

Άσκηση 1. Ένα κουτί περιέχει 15 κόκκινες και 5 άσπρες μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία δύο μπάλες χωρίς επανάθεση.

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι και οι δύο μπάλες είναι άσπρες;
- (β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη και η δεύτερη είναι άσπρη;

Βοήθεια: Χρησιμοποιείτε τον πολλαπλασιαστικό νόμο.

Άσκηση 2. Πριν φύγει για τη δουλειά του ο Νίκος ελέγχει το δελτίο καιρού στην τηλεόραση για να αποφασίσει αν θα πάρει μαζί του ομπρέλα ή όχι. Όταν το δελτίο λέει ότι θα βρέξει, η πιθανότητα όντως να βρέξει είναι 80%. Από την άλλη, όταν το δελτίο λέει ότι δεν θα βρέξει, η πιθανότητα να βρέξει είναι 10%. Κατά τη διάρκεια του χειμώνα το δελτίο λέει "βροχή" 7 στις 10 μέρες, ενώ κατά τη διάρκεια του καλοκαιριού, το δελτίο λέει "βροχή" 2 στις 10 μέρες.

(α) Μία μέρα που ο Νίκος δεν κοίταξε το δελτίο, έβρεξε. Ποια είναι η πιθανότητα ότι το δελτίο είπε "βροχή" αν ήταν μία μέρα του χειμώνα; Ποια είναι η πιθανότητα ότι το δελτίο είπε "βροχή" αν ήταν μία μέρα του καλοκαιριού;

(β) Η πιθανότητα να μην κοιτάξει το δελτίο ο Νίκος είναι 0.2 για οποιαδήποτε ημέρα του χρόνου. Όταν χάνει το δελτίο, ο Νίκος ρίχνει ένα δίκαιο κέρμα για να αποφασίσει αν θα πάρει ομπρέλα μαζί του. Τις μέρες που βλέπει το δελτίο, παίρνει πάντα μαζί του την ομπρέλα αν το δελτίο πει "βροχή", και δεν την παίρνει ποτέ αν το δελτίο πει "όχι βροχή". Είναι τα γεγονότα "ο Νίκος παίρνει την ομπρέλα" και "το δελτίο λέει όχι βροχή" ανεξάρτητα μεταξύ τους; Εξαρτάται η απάντηση από την εποχή;

(γ) Ο Νίκος κρατά την ομπρέλα του και δεν βρέχει. Δεδομένου ότι ισχύουν οι συνθήκες στο (β), ποια είναι η πιθανότητα ότι ο Νίκος είδε το δελτίο;

Βοήθεια: Χρησιμοποιείτε δένδρα, δεσμευμένες πιθανότητες και τον κανόνα του Bayes.

Άσκηση 3. Το κατάστημα της γειτονιάς σας πραγματοποιεί εκκαθάριση. Τα πάντα πρέπει να πωληθούν, νέα και παλιά! Το κατάστημα έχει 1000 παλιά κομμάτια και 1500 καινούρια. Το πρόβλημα είναι ότι 15% των παλιών είναι ελαττωματικά καθώς και 5% των νέων.

(α) Ρίχνετε ένα δίκαιο κέρμα για να αποφασίσετε αν θα αγοράσετε παλιό ή νέο προϊόν. Διάλεγετε δύο κομμάτια του ίδιου τύπου (νέα ή παλιά) ανάλογα με το αποτέλεσμα μίας και μοναδικής ρίψης του κέρματος. Ποια η πιθανότητα ότι και τα δύο θα είναι ελαττωματικά;

(β) Δεδομένων των συνθηκών στο (α), και του ότι και τα δύο αντικείμενα είναι ελαττωματικά, ποια η πιθανότητα ότι και τα δύο είναι παλιά;

Άσκηση 4. Για κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις, αναφέρετε αν είναι σωστές ή όχι και δώστε μία μικρή απόδειξη.

(α) Αν $P(A/B) = P(A)$, τότε $P(B/A^c) = P(B)$.

(β) Αν 5 από τις 10 ανεξάρτητες ρίψεις ενός δίκαιου κέρματος φέρουν κεφαλή, τα γεγονότα "η πρώτη ρίψη είναι κεφαλή" και "η δέκατη ρίψη είναι κεφαλή" είναι ανεξάρτητα.

(γ) Αν 10 από τις 10 ανεξάρτητες ρίψεις ενός δίκαιου κέρματος φέρουν κεφαλή, τα γεγονότα "η πρώτη ρίψη είναι κεφαλή" και "η δέκατη ρίψη είναι κεφαλή" είναι ανεξάρτητα.

(δ) Αν τα γεγονότα $A_1, A_2, \dots, A_n$ αποτελούν μία διαμέριση του δειγματοχώρου, για δύο οποιαδήποτε γεγονότα B, C ισχύει ότι

$$P(B/C) = \sum_{i=1}^n P(A_i/C)P(B/A_i).$$

Άσκηση 5. Η Μαρία, πρωτοετής φοιτήτρια στο Τμήμα μας, κάνει έναν με πέντε νέους φίλους/ες κάθε εβδομάδα, με ίση πιθανότητα. Ο αριθμός των φίλων που κάνει κάθε εβδομάδα είναι ανεξάρτητος από τις υπόλοιπες εβδομάδες. Μας ενδιαφέρει τι γίνεται σε δύο συνεχόμενες εβδομάδες.

Έστω A το γεγονός ότι "Η Μαρία έκανε συνολικά 10 νέους φίλους/ες τις δύο εβδομάδες". Έστω B το γεγονός ότι "Η Μαρία έκανε περισσότερους από 5 νέους φίλους/ες τις δύο εβδομάδες".

(α) Είναι τα A και B ανεξάρτητα;

(β) Έστω Γ το γεγονός ότι "Η Μαρία έκανε ακριβώς 5 νέους φίλους/ες την πρώτη εβδομάδα". Είναι τα A και B υπό συνθήκη ανεξάρτητα δεδομένου του Γ ;

(γ) Είναι τα A και Γ ανεξάρτητα; Είναι τα B και Γ ανεξάρτητα;

(δ) Δεδομένου ότι η Μαρία έκανε συνολικά 6 φίλους σε δύο εβδομάδες, ποια είναι η πιθανότητα ότι έκανε 2 φίλους την πρώτη εβδομάδα; Ποια είναι η πιθανότητα ότι έκανε 3 φίλους την πρώτη εβδομάδα;

(ε) Δεδομένου ότι η Μαρία έκανε συνολικά 6 φίλους σε δύο εβδομάδες, ποια είναι η πιθανότητα ότι έκανε 2 φίλους σε τουλάχιστον μία από τις δύο εβδομάδες; Ποια είναι η πιθανότητα ότι έκανε 3 φίλους σε τουλάχιστον μία από τις δύο εβδομάδες;