ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2005
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 05/10/2005 Ημερομηνία Παράδοσης: 12/10/2005

Άσκηση 1. Έστω G το γεγονός ότι ο επιλεγμένος μαθητής είναι διάνοια, και C το γεγονός ότι ο επιλεγμένος μαθητής είναι ΑΕΚτζής. Μας δίδεται ότι: $P(G) = 0.6, P(C) = 0.7, P(G^c \cap C^c) = 0.25$. Άρα θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(G \cup C) &= P(G) + P(C) - P(G \cap C) = 1 - P(G^c \cap C^c) \\ &\Rightarrow 0.6 + 0.7 - P(G \cap C) = 1 - 0.25 \\ &\Rightarrow P(G \cap C) = 0.55 \end{aligned}$$

Εφόσον $P(G) = P(G \cap C^c) + P(G \cap C)$, θα ισχύει ότι:

$$P(G \cap C^c) = P(G) - P(G \cap C) = 0.6 - 0.55 = 0.05$$

Με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε ότι:

$$P(C \cap G^c) = P(C) - P(C \cap G) = 0.7 - 0.55 = 0.15$$

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$\begin{aligned} P((G \cap C^c) \cup (C \cap G^c)) &= P(G \cap C^c) + P(C \cap G^c) - P((G \cap C^c) \cap (C \cap G^c)) \\ &= P(G \cap C^c) + P(C \cap G^c) = 0.05 + 0.15 = \boxed{0.2} \end{aligned}$$

Άσκηση 2. Εφόσον όλα τα αποτελέσματα είναι εξίσου πιθανά, από το κανόνα της διακριτής ομοιόμορφης κατανομής, μπορούμε απλώς να μετρήσουμε το ποσοστό των σημείων του δείγματος για το γεγονός που μας ενδιαφέρει (σε σύγκριση με ολόκληρο το δειγματικό χώρο).
Υπάρχουν $2^3 = 8$ πιθανά αποτελέσματα συνολικά. Οπότε, οι ζητούμενες πιθανότητες θα ισούνται με:

(α) Οποιαδήποτε ακολουθία έχει πιθανότητα ίση με 1/8. Επομένως, θα είναι: $P(\text{ΚΚΚ}) = \boxed{1/8}$.

(β) Με τον ίδιο τρόπο, $P(\text{ΚΓΚ}) = \boxed{1/8}$.

(γ) $P(2 \text{ κεφαλές και } 1 \text{ γράμμα}) = P(\text{ΚΚΓ,ΚΓΚ,ΓΚΚ}) = \boxed{3/8}$.

(δ) $P(\text{κεφαλές περισσότερες από γράμματα}) = P(\text{ΚΚΚ,ΚΚΓ,ΚΓΚ,ΓΚΚ}) = 4/8 = \boxed{1/2}$.

Άσκηση 3. Έστω A το γεγονός ότι θα βρέξει σήμερα και B το γεγονός ότι θα βρέξει αύριο. Το γεγονός ότι θα βρέξει και σήμερα και αύριο μπορεί να εκφραστεί ως η τομή των γεγονότων A και B δηλαδή $A \cap B$. Επιπλέον, το γεγονός ότι θα βρέξει είτε σήμερα είτε αύριο είναι η ένωση των γεγονότων A και B δηλαδή $A \cup B$. Ένα από τα Αξιώματα των Πιθανοτήτων είναι και το ακόλουθο:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Παρατηρούμε ότι: $P(A \cup B) = 0.3 + 0.5 - 0.2 = 0.6$, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την πιθανότητα 0.7 που έχει δωθεί από τον εκφωνητή για το ίδιο γεγονός $A \cup B$ (μέρος (δ) της εκφώνησης).

Άσκηση 4. Έστω $B_1 = A_1,\ B_i = A_i \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right),\ i > 1$.Τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \\ &\leq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα χρησιμοποιεί το γεγονός ότι τα B_i είναι ξένα μεταξύ τους, και η ανισότητα έπεται αφού $B_i \subset A_i$.

Άσκηση 5. Με βάση το αποτέλεσμα της άσκησης 4. και τους νόμους του De Morgan, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= 1 - P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c\right) \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i^c\right) = 1 \\ \xrightarrow{P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq 1} P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= 1 \end{aligned}$$

Άσκηση 6. Πρώτα, προσδιορίζουμε τις πιθανότητες των έξι πιθανών αποτελεσμάτων. Έστω $a = P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\})$ και $b = P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\})$. Μας δίδεται ότι: $b = 2a$. Σύμφωνα με τα Αξιώματα της Προσθετικότητας (additivity) και της Κανονικοποίησης (normalization), θα έχουμε ότι: $1 = 3a+3b = 3a+6a = 9a$. Επομένως, θα είναι: $a = 1/9,\ b = 2/9$ και η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με: $P(\{1, 2, 3\}) = 1/9 + 2/9 + 1/9 = 4/9$.

Άσκηση 7. Το αποτέλεσμα αυτού του πειράματος μπορεί να είναι μια οποιαδήποτε πεπερασμένη ακολουθία της μορφής $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, όπου το n είναι ένας αυθαίρετος θετικός ακέραιος, τα $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ ανήκουν στο σύνολο $\{1, 3\}$, και το a_n ανήκει στο σύνολο $\{2, 4\}$. Επιπρόσθετα, υπάρχουν πιθανά αποτελέσματα στα οποία ένας ζυγός αριθμός δεν λαμβάνεται ποτέ. Αυτού του είδους τα αποτελέσματα είναι άπειρες ακολουθίες της μορφής: $(a_1, a_2, \ldots)$, με το κάθε στοιχείο της ακολουθίας να ανήκει στο $\{1, 3\}$. Ο δειγματικός χώρος αποτελείται από όλα τα πιθανά αποτελέσματα των παραπάνω δύο τύπων.

Άσκηση 8. Έστω D το γεγονός ότι η ελάχιστη θερμοκρασία μεταξύ των δύο μεσημεριανών θερμοκρασιών είναι 25^oC βαθμοί. Τότε

$$P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right) = 0.7 - P\left(A \cap B\right)$$

$$P\left(C \cup D\right) = P\left(C\right) + P\left(D\right) - P\left(C \cap D\right) = 0.2 + P\left(D\right) - P\left(C \cap D\right)$$

Αφαιρώντας μια από τις παραπάνω εξισώσεις από την άλλη και λαμβάνοντας υπόψη ότι $A \cup B = C \cup D$ και $A \cap B = C \cap D$ έχουμε

$$0 = 0.5 - P\left(D\right)$$

δηλαδή

$$P\left(D\right) = 0.5$$