

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2005
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 05/10/2005

Ημερομηνία Παράδοσης: 12/10/2005

Άσκηση 1. Από τους μαθητές σε μία τάξη, 60% είναι διάνοιες, 70% είναι ΑΕΚτζήδες και 25% δεν ανήκουν σε καμία από αυτές τις δύο κατηγορίες. Ποια η πιθανότητα ότι ένας τυχαία επιλεγμένος μαθητής είναι διάνοια ή ΑΕΚτζής αλλά όχι και τα δύο.

Άσκηση 2. Ρίχνουμε ένα δίκαιο κέρμα τρεις φορές. Βρείτε τις πιθανότητες των ακόλουθων γεγονότων.

- (α) Να έρθει KKK .
- (β) Να έρθει $KΓK$.
- (γ) Να έρθουν δύο κεφαλές και μία γράμματα.
- (δ) Να έρθουν περισσότερες κεφαλές παρά γράμματα.

Άσκηση 3. Ο εκφωνητής του δελτίου καιρού δίνει τις ακόλουθες πιθανότητες για τον καιρό τις επόμενες δύο μέρες:

- (α) βροχή σήμερα: 0.3
- (β) βροχή αύριο: 0.5
- (γ) βροχή και σήμερα και αύριο: 0.2
- (δ) βροχή σήμερα ή αύριο: 0.7

Είναι αυτό το δελτίο καιρού συμβατό με τα Αξιώματα των Πιθανοτήτων;

Άσκηση 4. Αποδείξτε την ανισότητα Boole:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \quad (1)$$

Βοήθεια: Ορίστε τα σύνολα $B_1 = A_1$ και $B_i = A_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right)^c$, $i > 1$ και εκφράστε την πιθανότητα στο αριστερό μέρος της (1) με τη βοήθεια αυτών των συνόλων. Τι σχέση έχουν μεταξύ τους τα B_i ;

Άσκηση 5. Δείξτε ότι αν $P(A_i) = 1$ για κάθε $i \geq 1$, τότε $P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1$.

Βοήθεια: Θα χρησιμοποιήσετε τους νόμους του De Morgan και το αποτέλεσμα της Άσκησης 4.

Άσκηση 6. Ένα εξάεδρο ζάρι κατασκευάζεται με τέτοιο τρόπο ώστε οι έδρες του με άρτιο αριθμό έχουν διπλάσια πιθανότητα να εμφανιστούν απ' ότι έχουν οι έδρες με περιττό αριθμό. Όλες οι έδρες με άρτιο αριθμό είναι ισοπίθανες μεταξύ τους και το ίδιο ισχύει και για τις έδρες με περιττό αριθμό. Ορίστε το πιθανοτικό μοντέλο για το πείραμα της απλής ρίψης αυτού του ζαριού και βρείτε την πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι μικρότερο από 4.

Άσκηση 7. Ρίχνουμε συνεχώς ένα τετράεδρο ζάρι μέχρις ότου εμφανιστεί για πρώτη φορά άρτιος αριθμός. Περιγράψτε το δειγματικό χώρο αυτού του πειράματος τύχης.

Άσκηση 8. Έστω A το γεγονός ότι η μεσημεριανή θερμοκρασία στο Ηράκλειο είναι 25°C και έστω B το γεγονός ότι η μεσημεριανή θερμοκρασία στην Αθήνα είναι 25°C . Επίσης, έστω C το γεγονός ότι η μέγιστη των δύο μεσημεριανών θερμοκρασιών σε Ηράκλειο και Αθήνα είναι 25°C . Αν $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ και $P(C) = 0.2$, βρείτε την πιθανότητα ότι η ελάχιστη μεταξύ των δύο μεσημεριανών θερμοκρασιών είναι 25°C .