Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2004
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
Λύσεις Προόδου
<u>27-11-2004</u>

Θέμα 1

(α) Ισχύει ότι:

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
&= P(A) + P(B) - P(A \mid B) \cdot P(B) \\
\Rightarrow \; P(B) &= \frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A \mid B)} = \frac{4/5 - 3/5}{1 - 1/2} = \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

(β)

$$P(C \mid A \cup B) = \frac{P\Big(C \cap (A \cup B)\Big)}{P(A \cup B)} = \frac{P\Big((C \cap A) \cup (C \cap B)\Big)}{P(A \cup B)}$$

Τα A και B είναι ξένα μεταξύ τους και συνεπώς και τα $C \cap A$ και $C \cap B$ είναι ξένα μεταξύ τους. Επομένως,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

και

$$P\Big((C \cap A) \cup (C \cap B)\Big) = P(C \cap A) + P(C \cap B)$$

Άρα,

$$P(C \mid A \cup B) = \frac{P(C \cap A) + P(C \cap B)}{P(A) + P(B)}$$

Αλλά,

$$P(C \cap A) = P(C \mid A) \cdot P(A)$$

και

$$P(C \cap B) = P(C \mid B) \cdot P(B)$$

Επίσης,

$$P(A) = 2\,P(B)$$

Συνεπώς,

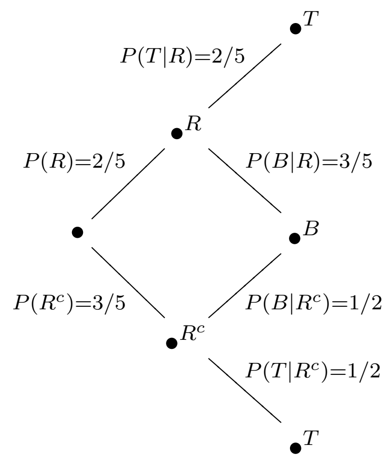
$$P(C \mid A \cup B) = \frac{P(C \mid A) \cdot 2\,P(B) + P(C \mid B) \cdot P(B)}{2\,P(B) + P(B)} = \frac{\dfrac{3}{7} \cdot 2 + \dfrac{2}{7}}{2 + 1} = \frac{8}{21}$$

Θέμα 2

Ορίζουμε τα εξής γεγονότα:

$$
\begin{aligned}
T &= \{\text{ο Χρήστος προλαβαίνει το τρένο}\}\\
R &= \{\text{ο Χρήστος πάει για τρέξιμο}\}\\
R^c &= \{\text{ο Χρήστος δεν πάει για τρέξιμο}\}\\
B &= \{\text{ο Χρήστος παίρνει το λεωφορείο}\}
\end{aligned}
$$

(α)



(β)

$$
\begin{aligned}
P(T) &= P(T \mid R) \cdot P(R) + P(T \mid R^c) \cdot P(R^c)\\
&= 2/5 \cdot 2/5 + 1/2 \cdot 3/5 = 23/50
\end{aligned}
$$

(γ)

$$
P(R \mid T) = \frac{P(T \mid R) \cdot P(R)}{P(T)} = \frac{2/5 \cdot 2/5}{23/50} = \frac{8}{23}
$$

(δ) Έστω N_T η τ.μ. που περιγράφει πόσες φορές ο Χρήστος προλαβαίνει το τρένο στις 5 εργάσιμες μέρες. Προφανώς, η N_T είναι διωνυμική τ.μ. με παραμέτρους $(5, 23/50)$, όπου $P(T) = 23/50$ είναι η πιθανότητα ο Χρήστος να προλάβει το τρένο ένα τυχαίο πρωινό. Επομένως,

$$
P(N_T = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{23}{50}\right)^2 \left(\frac{27}{50}\right)^3
$$

(ε)

$$
E[N_T] = p \cdot n = \frac{23}{50} \cdot 5 = \frac{23}{10}
$$

Θέμα 3

(α)

$$E[X] = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

(β) Η τ.μ. Y γίνεται 0 όταν η τ.μ. X παίρνει τις τιμές $X = 1, 2, 3, 4,$ ή 5 καθώς κανένας επιβάτης δεν μένει πίσω. Η τ.μ. Y παίρνει τις τιμές $1, 2, 3$ όταν η τ.μ. X παίρνει τις τιμές $X = 6, 7, 8$ αντίστοιχα, καθώς $X - 5$ είναι ο αριθμός των επιβατών που μένουν πίσω. Η διωνυμική τ.μ. X παίρνει τις τιμές $6, 7, 8$ με πιθανότητες:

$$\binom{8}{6}(1/2)^8, \quad \binom{8}{7}(1/2)^8 \text{ και } \binom{8}{8}(1/2)^8 \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Επομένως,

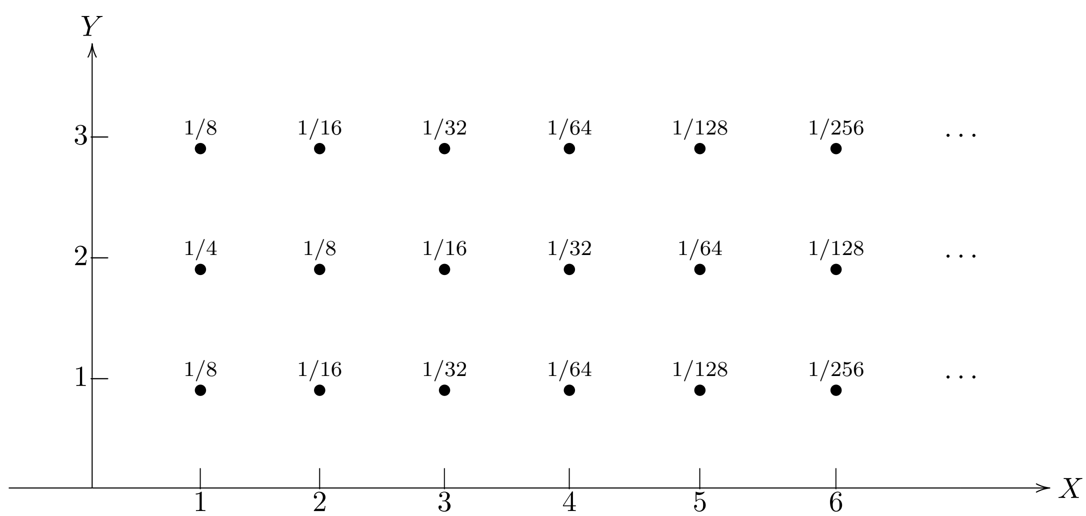
$$P_Y(y) = \begin{cases} 219/256, & y = 0 \\ 28/256, & y = 1 \\ 8/256, & y = 2 \\ 1/256, & y = 3 \end{cases}$$

Συνεπώς,

$$E[Y] = \frac{0 \cdot 219 + 1 \cdot 28 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 1}{256} = \frac{47}{256}$$

Θέμα 4

(α)



Είναι:

- $0 < P_{X,Y}(x,y) < 1, \quad \forall (x,y)$
- και

$$\sum_{x=1}^{+\infty}\sum_{y=1}^{3} P_{X,Y}(x,y) = \sum_{x=1}^{+\infty} \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^x + \sum_{x=1}^{+\infty} \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^x + \sum_{x=1}^{+\infty} \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^x$$
$$= \frac{1}{4}\,\frac{1/2}{1-1/2} + \frac{1}{2}\,\frac{1/2}{1-1/2} + \frac{1}{4}\,\frac{1/2}{1-1/2}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 1 = 1$$

Συνεπώς, η $P_{X,Y}(x,y)$ είναι μια έγκυρη συνάρτηση πιθανότητας.

(β) Ισχύουν τα εξής:

$$P_X(x) = \sum_{y=1}^{3} P_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad x = 1,2,3,\ldots$$

$$P_Y(y) = \sum_{x=1}^{+\infty} P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^x, & y = 1,3 \\ \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^x, & y = 2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow\; P_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\,\frac{1/2}{1-1/2}, & y = 1,3 \\ \frac{1}{2}\,\frac{1/2}{1-1/2}, & y = 2 \end{cases} = \begin{cases} 1/4, & y = 1,3 \\ 1/2, & y = 2 \end{cases}$$

Βλέπουμε ότι: $P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)\cdot P_Y(y)$ και συνεπώς οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες.

(γ) Η γεωμετρική κατανομή έχει συνάρτηση πιθανότητας :

$$P_X(k) = (1-p)^{k-1}\cdot p, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

Άρα, είναι προφανές ότι η τ.μ. X του προβλήματος είναι γεωμετρική με παράμετρο $p = 1/2$. Επομένως, $E[X] = \frac{1}{p} = 2$, $var(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-1/2}{1/4} = 2$.

(δ) Χρειάζεται πρώτα να υπολογίσουμε τις $E[Y], E[Y^2], E[Y^4]$.
Οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E[Y] &= 1^1\cdot\frac{1}{4} + 3^1\cdot\frac{1}{4} + 2^1\cdot\frac{1}{2} = 2 \\ E[Y^2] &= 1^2\cdot\frac{1}{4} + 3^2\cdot\frac{1}{4} + 2^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{2} \\ E[Y^4] &= 1^4\cdot\frac{1}{4} + 3^4\cdot\frac{1}{4} + 2^4\cdot\frac{1}{2} = \frac{57}{2} \end{aligned}$$

Εν τέλει θα έχουμε:

$$E[Z] = E[2X + Y^2] = 2\,E[X] + E[Y^2] = 2 \cdot 2 + \frac{9}{2} = \frac{17}{2}$$

και

$$\begin{aligned} var(Z) &= var(2X + Y^2) = var(2X) + var(Y^2) \quad \text{(X,Υ ανεξάρτητες)} \\ &= 4 \cdot var(X) + var(Y^2) \\ &= 4 \cdot var(X) + E[Y^4] - E^2[Y^2] \\ &= 4 \cdot 2 + \frac{57}{2} - \frac{81}{4} = \frac{65}{4} \end{aligned}$$

(ε) Έχουμε:

$$\begin{aligned} P_{Z|X}(z|X=1) &= P(\{Z=z\}|\{X=1\}) = P\left(\{2X+Y^2=z\}|\{X=1\}\right) \\ &= P\left(\{2+Y^2=z\}\right) = \begin{cases} 1/4, & z=3,11 \\ 1/2, & z=6 \end{cases} \end{aligned}$$

αφού η τ.μ. Y παίρνει τις τιμές $1, 3, 2$ με πιθανότητες $1/4, 1/4, 1/2$ αντίστοιχα.