Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
27 Νοεμβρίου 2004 - Διάρκεια: 2 Ωρες

Θέμα 1 - 20 μονάδες
Έστω A, B, και C τρία γεγονότα ορισμένα στο δειγματοχώρο Ω ενός πειράματος τύχης.

(α) Αν $P(A) = 3/5$, $P(A \cup B) = 4/5$ και $P(A/B) = 1/2$, βρείτε την πιθανότητα $P(B)$.

(β) Έστω τώρα ότι αντί για τις υποθέσεις του μέρους (α), ισχύουν τα εξής: Τα γεγονότα A και B είναι *ασυμβίβαστα (ξένα)* μεταξύ τους με $P(A) = 2P(B)$. Επίσης, $P(C/A) = 3/7$ και $P(C/B) = 2/7$. Βρείτε την πιθανότητα $P(C/A \cup B)$.

Θέμα 2 - 25 μονάδες
Ο Χρήστος πάει για τρέξιμο το πρωί με πιθανότητα $\frac{2}{5}$. Τα πρωινά που πάει για τρέξιμο, προλαβαίνει κατόπιν το τρένο για τη δουλειά του με πιθανότητα $\frac{2}{5}$. Τα πρωινά που δεν πάει για τρέξιμο, προλαβαίνει το τρένο με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Αν δεν προλάβει το τρένο, παίρνει το λεωφορείο. Το μοντέλο αυτό ισχύει για όλες τις εργάσημες μέρες, Δευτέρα-Παρασκευή.

(α) Σχεδιάστε το δενδρικό διάγραμμα που περιγράφει το πρωινό του Χρήστου.

(β) Ποια η πιθανότητα ότι ο Χρήστος προλαβαίνει το τρένο κάποιο τυχαίο πρωινό;

(γ) Αν γνωρίζουμε ότι ο Χρήστος πρόλαβε το τρένο, ποια η πιθανότητα ότι πήγε για τρέξιμο το πρωί;

(δ) Ποια η πιθανότητα ότι ο Χρήστος προλαβαίνει το τρένο δύο φορές την βδομάδα; (Δύο φορές στις 5 εργάσημες μέρες).

(ε) Ποιος ο μέσος αριθμός των ημερών κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας που ο Χρήστος θα προλάβει το τρένο;

Θέμα 3 - 20 μονάδες
Οκτώ άτομα κάνουν κράτηση για να ταξιδέψουν με μια λιμουζίνα 5 θέσεων από το Hollywood στη Santa Monica. Ο αριθμός των ατόμων που εμφανίζονται για να ταξιδέψουν μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μία διωνυμική τυχαία μεταβλητή (τ.μ.), X, με παραμέτρους $(8, \frac{1}{2})$.

(α) Ποια η μέση τιμή της τ.μ. X;

(β) Αν εμφανιστούν πάνω από 5 επιβάτες, μόνο οι 5 πρώτοι επιτρέπεται να ταξιδέψουν, ενώ οι υπόλοιποι μένουν πίσω. Έστω Y ο αριθμός αυτών που μένουν πίσω. Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. Y. Ποιος ο μέσος αριθμός επιβατών που μένουν πίσω;

Θέμα 4 - 35 μονάδες
Θεωρείστε την ακόλουθη από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) των τ.μ. X και Y:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^x & y = 1, 3; \quad x = 1, 2, 3, ... \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^x & y = 2; \qquad x = 1, 2, 3, ... \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της $p_{X,Y}(x,y)$. Δείξτε ότι η $p_{X,Y}(x,y)$ είναι μία έγκυρη συνάρτηση πιθανότητας.

(β) Υπολογίστε τις περιθωριακές σ.π. $p_X(x)$ και $p_Y(y)$ των τ.μ. X και Y, αντίστοιχα. Είναι οι X και Y ανεξάρτητες;

(γ) Αναγνωρίστε το όνομα της κατανομής της τ.μ. X και την παράμετρο αυτής. Βρείτε τη μέση τιμή, $E[X]$, και τη διασπορά της, $var(X)$.

(δ) Έστω $Z = 2X + Y^2$. Βρείτε τη μέση τιμή, $E[Z]$, και τη διασπορά, $var(Z)$, της Z.

(ε) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π. $p_{Z/X}(z/x = 1)$.