Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2004
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
Λύσεις Τελικής Εξέτασης Σεπτεμβρίου
17-09-2005

Θέμα 1

(α) Η συνάρτηση πιθανότητας της ομοιόμορφης τ.μ. X είναι:

$$\begin{aligned} P_X(k) &= \frac{1}{4}, \quad k = 1,2,3,4. \\ E[X] &= \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{4} \cdot k = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{5}{2} \\ var\,(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1^2+2^2+3^3+4^2}{4} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

(β) Έχουμε ότι:

$$P_{N,X}(n,k) = P_{N|X}\,(n \mid k) \cdot P_X(k) = \frac{1}{4k}, \quad k = 1,2,3,4;\ n = 1,\ldots,k.$$

$P_{N,X}(n,k) =$

$n \diagdown k$	1	2	3	4
1	1/4	1/8	1/12	1/16
2	–	1/8	1/12	1/16
3	–	–	1/12	1/16
4	–	–	–	1/16

(γ) Είναι:

$$P_N(n) = \sum_{k=n}^{4} P_{N,X}(n,k) = \sum_{k=n}^{4} \frac{1}{4k} = \begin{cases} \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16} = \frac{25}{48}, & n=1 \\ \frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16} = \frac{13}{48}, & n=2 \\ \frac{1}{12}+\frac{1}{16} = \frac{7}{48}, & n=3 \\ \frac{1}{16}, & n=4 \end{cases}$$

(δ) Είναι:

$$E[N] = \sum_{n=1}^{4} n \cdot P_N(n) = \ldots = 1.75$$

και

$$var(N) = E[N^2] - (E[N])^2 = \sum_{n=1}^{4} n^2 \cdot P_N(n) - 1.75^2 = 0.854$$

(ε) Η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X δεδομένου ότι $N = 2$ θα ισούται με:

$$\begin{aligned} P_{X|N}(k \mid n=2) &= \frac{P_{N|X}(2 \mid k) \cdot P_X(k)}{P_N(2)} = \frac{\frac{1}{4k}}{13/48} = \\ &= \frac{12}{13k}, \quad k = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Θέμα 2

(i) Λάθος. Είναι: $E[X^2] = \sigma^2 - (E[X])^2 \neq \sigma^2 - (E[Y])^2 = E[Y^2]$, αφού στη γενική περίπτωση είναι $E[X] \neq E[Y]$.

(ii) Λάθος. Είναι:

$$\begin{aligned} var(X+Y) &= var(X) + var(Y) + 2cov(X,Y) \\ &= 2\sigma^2 + 2cov(X,Y) \neq 2\sigma^2 \end{aligned}$$

όταν οι X, Y είναι συσχετισμένες.

(iii) Λάθος. Είναι: $var(X-Y) = var(X) + var(Y) - 2cov(X,Y) \neq 0$.

(iv) Σωστό. Είναι: $var(X+Y) + var(X-Y) = 2\sigma^2 + 2cov(X,Y) + 2\sigma^2 - 2cov(X,Y) = 4\sigma^2$.

(v) Σωστό. Είναι:

$$\begin{aligned} var(2X+3Y) &= var(2X) + var(3Y) + 2cov(2X,3Y) \\ &= 4\sigma^2 + 9\sigma^2 + 2\cdot 2\cdot 3\, cov(X,Y) \\ &= 9\sigma^2 + 4\sigma^2 + 2\cdot 3\cdot 2\, cov(X,Y) \\ &= var(3X+2Y) \end{aligned}$$

(vi) Σωστό. Προκύπτει άμεσα από τις σχέσεις στα (ii) και (iii):

$$\left.\begin{array}{l} var(X+Y) = 2\sigma^2 + 2cov(X,Y) \geq 0 \Rightarrow cov(X,Y) \geq -\sigma^2 \\ var(X-Y) = 2\sigma^2 - 2cov(X,Y) \geq 0 \Rightarrow cov(X,Y) \leq \sigma^2 \end{array}\right\} |cov(X,Y)| \leq \sigma$$

(vii) Σωστό. Δεδομένου ότι

$$var(2X) = 4\sigma^2$$

και ότι

$$var(X+Y) + var(X-Y) = 4\sigma^2 \qquad \text{από το (iv)}$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} var[(X+Y)+(X-Y)] &= var(X+Y) + var(X-Y) - 2cov(X+Y, X-Y) \\ \Rightarrow 4\sigma^2 &= 4\sigma^2 - 2cov(X+Y, X-Y) \\ \Rightarrow cov(X+Y, X-Y) &= 0 \end{aligned}$$

.

(viii) Λάθος.

Θέμα 3

(α) Η πιθανότητα ένας φοιτητής της Ε' Δημοτικού να έχει το πολύ 600 δρχ. ισούται με:

$$\begin{aligned} P(X \le 600) &= P\left(\frac{X-500}{100} \le \frac{600-500}{100}\right) = P(Z \le 1) = \\ &= \Phi(1) = \boxed{0,8413.} \end{aligned}$$

(β) Κάνουμε χρήση της διωνυμικής κατανομής:

$$\begin{aligned} &P(\text{Από τους 3 μαθητές, ένας έχει } > 600 \text{ και δύο έχουν } \le 600) = \\ &= \binom{3}{2} \cdot (0,8413)^2 \cdot (1 - 0,8413) = \boxed{0,3370.} \end{aligned}$$

(γ) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} S_q = \sum_{i=1}^{q} X_i \quad &\Rightarrow \quad S_q \sim N(9 \cdot 500, 9 \cdot 100^2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad S_q \sim N(4.500, 300^2) \end{aligned}$$

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$\begin{aligned} P(S_q > 4.800) &= P\left(\frac{S_q - 4.500}{300} > \frac{4.800 - 4.500}{300}\right) \\ &= 1 - \Phi(1) = \boxed{0,1587.} \end{aligned}$$

(δ) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} W &= X + Y \sim N\left(500 + 600, 100^2 + 160^2\right) \Rightarrow \\ W &\sim N\left(1.100, (188,68)^2\right) \end{aligned}$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$P(W < 1.188) = P\left(\frac{W - 1.100}{188,68} < \frac{1.188 - 1.100}{188,68}\right) = \Phi(0,47) = \boxed{0,6808.}$$

Θέμα 4

(α) Ισχύει ότι:

$$P(I_k = 1) = \underbrace{0.9^2 \cdot 0.9^2 \cdots 0.9^2}_{\text{20 φορές}} = 0.9^{20}$$

Άρα, η μέση τιμή της τ.μ. I_k θα ισούται με:

$$E[I_k] = 1 \cdot P(I_k = 1) + 0 \cdot P(I_k = 0) = 0.9^{20}$$

(β) Έστω X ο αριθμός των μηχανών που δεν χρησιμοποιήθηκαν ποτέ. Τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} X = \sum_{k=1}^{10} I_k \Rightarrow E[X] &= E[\sum_{k=1}^{10} I_k] = \sum_{k=1}^{10} E[I_k] \\ &= \sum_{k=1}^{10} 0.9^{20} = 1.216 \end{aligned}$$

Θέμα 5

(α) Θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(Z > z) &= P\left(Z > z \mid B = 0\right) \cdot P(B = 0) + P\left(Z > z \mid B = 1\right) \cdot P(B = 1) \\ &= P\left(\min\{X_1, X_2\} > z\right) \cdot P(B = 0) + P\left(\max\{X_1, X_2\} > z\right) \cdot P(B = 1) \\ &= P\left(X_1 > z, X_2 > z\right) \cdot P(B = 0) + P\left(1 - (X_1 \leq z, X_2 \leq z)\right) \cdot P(B = 1) \\ &= \frac{1}{2} e^{\lambda_1 z} \cdot e^{\lambda_2 z} + \frac{1}{2}\left[1 - \left(1 - e^{\lambda_1 z}\right) \cdot \left(1 - e^{\lambda_2 z}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{\lambda_1 z} + e^{\lambda_2 z}\right), \qquad z \geq 0 \end{aligned}$$

(β) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_Z(z)$, της τ.μ. Z θα ισούται με:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(1 - \frac{1}{2}\left(e^{-\lambda_1 z} + e^{-\lambda_2 z}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\lambda_1 e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 z}\right), \qquad z \geq 0 \end{aligned}$$