Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2004
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
Λύσεις Τελικού Διαγωνίσματος
22-01-2005

$\boxed{\textbf{Θέμα 1}}$ Οι τ.μ. X και Y είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα $[0, 2]$. Επομένως:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1/2 & 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Επίσης, ισχύει ότι:

$$E[X] = E[Y] = \frac{0+2}{2} = 1$$

και

$$var(X) = var(Y) = \frac{(2-0)^2}{12} = 13$$

(α) Η περίμετρος, Z, είναι ίση με: $Z = 2X + 2Y$. Επομένως:

$$E[Z] = E[2X + 2Y] = 2E[X] + 2E[Y] = 4$$

και

$$\begin{aligned} var(Z) &= var(2X + 2Y) = var(2X) + var(2Y) \quad [X, Y : \text{ανεξάρτητες}] \\ &= 4var(X) + 4var(Y) = 4/3 + 4/3 = 8/3 \end{aligned}$$

(β) Η επιφάνεια, W, είναι ίση με: $W = XY$. Επομένως, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E[W] &= E[X] \cdot E[Y] \quad [X, Y : \text{ανεξάρτητες}] \\ &= 1 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} var(XY) &= E[X^2Y^2] - (E[XY])^2 \\ &= E[X^2] \cdot E[Y^2] - (E[XY])^2 \\ &= [var(X) + (E[X])^2] \cdot [var(Y) + (E[Y])^2] - (E[XY])^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} + 1^2\right) \cdot \left(\frac{1}{3} + 1^2\right) - 1^2 = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

(γ) Ισχύει ότι:

$$P\left(XY > 1 \mid 2X + 2Y > 4\right) = \frac{P\left(XY > 1 \cap 2X + 2Y > 4\right)}{P\left(2X + 2Y > 4\right)} = \frac{P(B)}{P(A)}$$

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των X, Y είναι ομοιόμορφη καθώς

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} 1/4 & 0 \leq x, y \leq 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Συνεπώς, ο όγκος πάνω από την περιοχή που ορίζεται από τις ευθείες $x + y = 2, x = 2$ και $y = 2$ (περιοχή A στο σχήμα) αντιπροσωπεύει την πιθανότητα $P(2X + 2Y > 4)$. Ο όγκος πάνω από την περιοχή B, που καθορίζεται από τις $xy = 1, y = 2, x = 2$, αντιπροσωπεύει την πιθανότητα $P(XY > 1 \mid 2X + 2Y > 4)$. Έχουμε ότι:

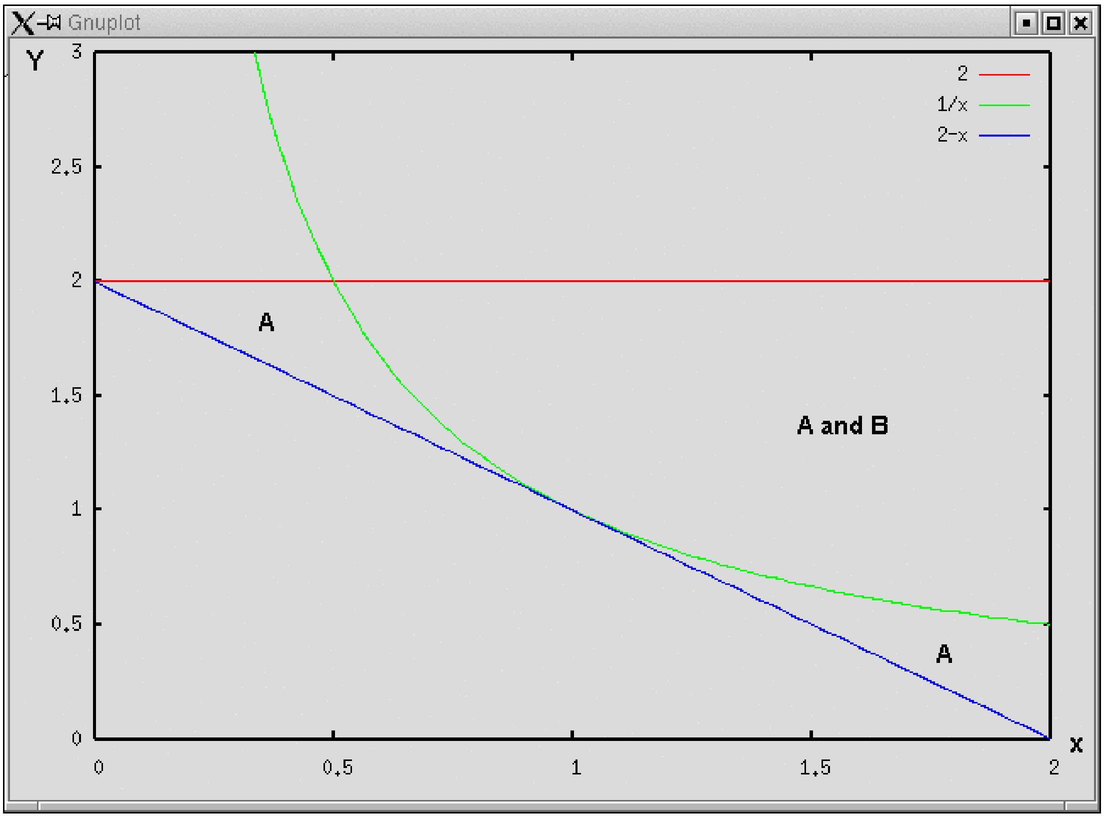
$$\begin{aligned} P(2X+2Y>4) &= \int_0^2\int_{2-x}^2 \frac{1}{4}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{y}{4}\Big|_{2-x}^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 \frac{x}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{8}\Big|_0^2 = 1/2 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} P(XY>1 \cap 2X+2Y>4) &= \int_{1/2}^2\int_{1/x}^2 \frac{1}{4}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^2 \frac{y}{4}\Big|_{1/x}^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_{1/2}^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4x}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x}{2} - \frac{\ln x}{4}\right)\Big|_{1/2}^2 \\ &= 1 - \frac{\ln 2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\ln(1/2)}{4} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$P(XY > 1 \mid 2X + 2Y > 4) = \frac{\frac{3}{4} - \frac{\ln 2}{2}}{1/2} \approx 0.807$$



Σχήμα 1: προσπάθεια αναπαράστασης της $P(XY > 1 \mid 2X + 2Y > 4)$

Θέμα 2

(α) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} cov(X+Y, X-Y) &= cov(X,X) + cov(X,-Y) + cov(Y,X) + cov(Y,-Y) \\ &= var(X) - cov(X,Y) + cov(X,Y) - var(Y) \\ &= var(X) - var(Y) = 0 \end{aligned}$$

καθώς οι X, Y έχουν την ίδια κατανομή.

(β) (i) Είναι:

$$E[Z^n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^n e^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z = 0$$

καθώς αποτελεί το ολοκλήρωμα της περιττής συνάρτησης $z^n \cdot e^{-z^2/2}$ από το $-\infty$ στο $+\infty$. Η $z^n \cdot e^{-z^2/2}$ είναι περιττή ως το γινόμενο της περιττής z^n με την άρτια $e^{-z^2/2}$.

(ii) Έχουμε:

$$\begin{aligned} cov\left(Z, Z^2\right) &= E[Z \cdot Z^2] - E[Z] \cdot E[Z^2] \\ &= E[Z^3] - E[Z] \cdot E[Z^2] = 0 - 0 \cdot E[Z^2] = 0 \end{aligned}$$

(iii) Είναι:

$$\rho\,(y,z) = \frac{cov(Y,Z)}{\sqrt{{\sigma_y}^2 \cdot {\sigma_z}^2}}$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} {\sigma_y}^2 &= var(a + bZ + cZ^2) = var(bZ + cZ^2) \\ &= var(bZ) + var(cZ^2) + 2\,cov(bZ, cZ^2) \\ &= b^2\,var(Z) + c^2\,var(Z^2) + 2\,bc\,cov(Z, Z^2) \\ &= b^2 \cdot 1 + c^2 \cdot 2 + 2\,bc \cdot 0 = b^2 + 2\,c^2 \end{aligned}$$

Επίσης, είναι:

$$\begin{aligned} cov(Y,Z) &= cov(a + bZ + cZ^2, 2) \\ &= cov(a,z) + cov(bz,z) + cov(cZ, Z^2) \\ &= 0 + b\,var(Z) + c\,cov(Z, Z^2) \\ &= 0 + b \cdot 1 + c \cdot 0 = b \end{aligned}$$

Άρα, τελικά θα έχουμε:

$$\rho(y,z) = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2c^2}}$$

Θέμα 3

Ορίζουμε το γεγονός $G = \{\text{ο καιρός είναι καλός}\}$, το οποίο έχει πιθανότητα ίση με: $P(G) = 2/3$.

(α) Για να βρούμε την σ.π.π της τ.μ. X βρίσκουμε πρώτα την σ.π.π της τ.μ. W αφού $X = Z + W$. Σύμφωνα με την εκφώνηση και χρησιμοποιώντας το Θ.Ο.Π. έχουμε:

$$f_W(\omega) = P(G) \cdot f_{W|G}(\omega) + P(G^c) \cdot f_{W|G^c}(\omega)$$

όπου:

$$f_{W|G}(\omega) = N(0,1) \quad \text{και} \quad f_{W|G^c}(\omega) = N(0,9)$$

Άρα:

$$f_W(\omega) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-w^2/2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,3}\, e^{-w^2/18}$$

Επομένως, αφού $X = Z + W$, η σ.π.π της X θα ισούται με:

$$f_X(x) = f_W(x-z) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-z)^2/2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,3}\, e^{-(x-z)^2/18}$$

(β) Προφανώς, έχουμε:

$$P(1 \le X \le 3) = \int_1^3 f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Είναι πολύ πιο εύκολο, όμως, να 'μεταφράσουμε' το γεγονός $1 \le X \le 3$ σε ένα γεγονός για την τ.μ. W και να εφαρμόσουμε το Θ.Ο.Π.:

$$\begin{aligned} P(1 \le X \le 3) &= P(1 \le Z + W \le 3) = P(-1 \le W \le 1) \\ &= P(G) \cdot \underbrace{P(-1 \le W \le 1 \mid G)}_{\alpha} + P(G^c) \cdot \underbrace{P(-1 \le W \le 1 \mid G^c)}_{\beta} \end{aligned}$$

Άρα,

- Όταν ο καιρός είναι καλός, $W \sim N(0,1)$ και επομένως:

$$\alpha = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\,\Phi(1) - 1$$

- Όταν ο καιρός είναι κακός, $W \sim N(0,9)$ και επομένως:

$$\beta = P(\frac{-1-0}{3} \le \frac{W-0}{3} \le \frac{1-0}{3}) = \Phi(\frac{1}{3}) - \Phi(\frac{-1}{3}) = 2\,\Phi(\frac{1}{3}) - 1$$

Συνεπώς:

$$P(1 \le X \le 3) = \frac{2}{3}(2\,\Phi(1) - 1) + \frac{1}{3}(2\,\Phi(\frac{1}{3}) - 1)$$

Θέμα 4

(α) Είναι:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \ge 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad \text{και} \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y \ge 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Επειδή οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. θα έχουμε:

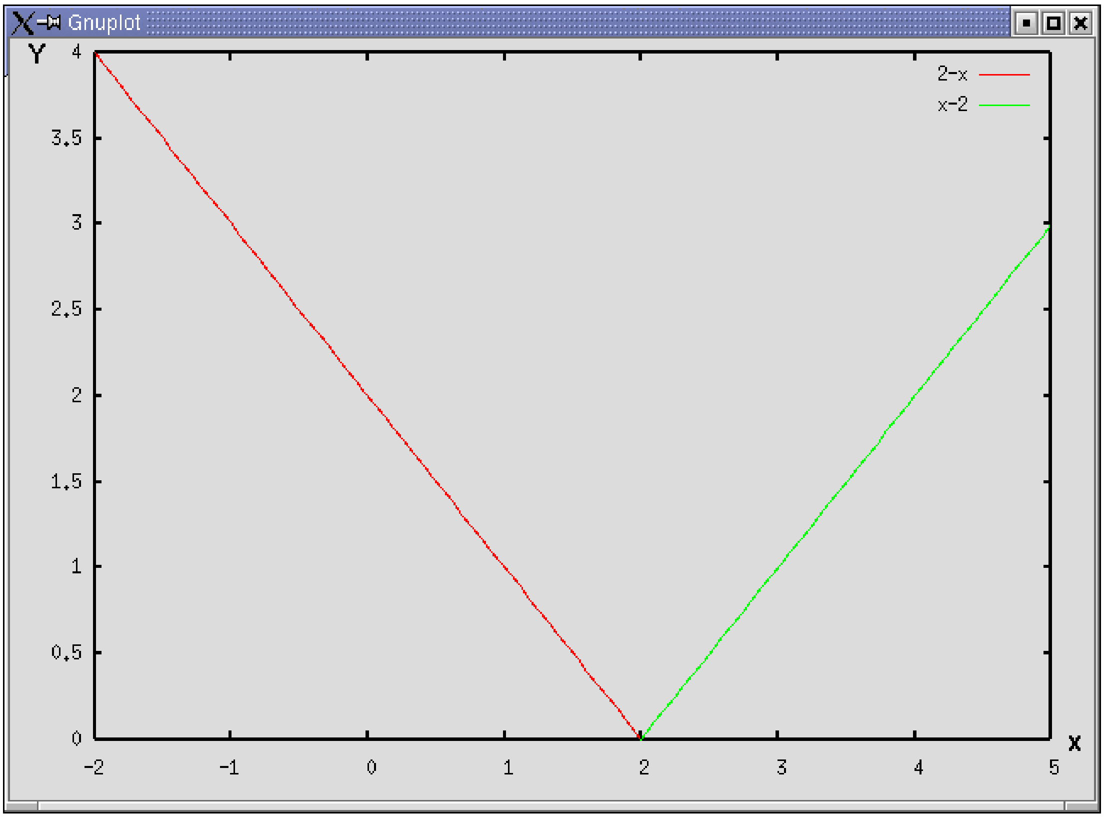
$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x, y \ge 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} E[|X-Y|] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int |x-y|\; f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{+\infty} \int_0^x (x-y)e^{-(x+y)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= 2\,[-\frac{1}{2}\,e^{-2x} - x\,e^{-x}]_{x=0}^{+\infty} = 1 \end{aligned}$$

Θέμα 5

(α)



Σχήμα 2: Γραφική παράσταση των $y = 2 - x$ και $y = 2 + x$

Το πεδίο τιμών της Y είναι το $[0, 3]$.

(β) Είναι:

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[|X - Z|] = \int_{-1}^{4} \frac{1}{5}\,|x-2|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{2} \frac{1}{5}\,(2-x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{4} \frac{1}{5}\,(x-2)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{5}\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{2} + \frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{2}^{4} = 1.3 \end{aligned}$$

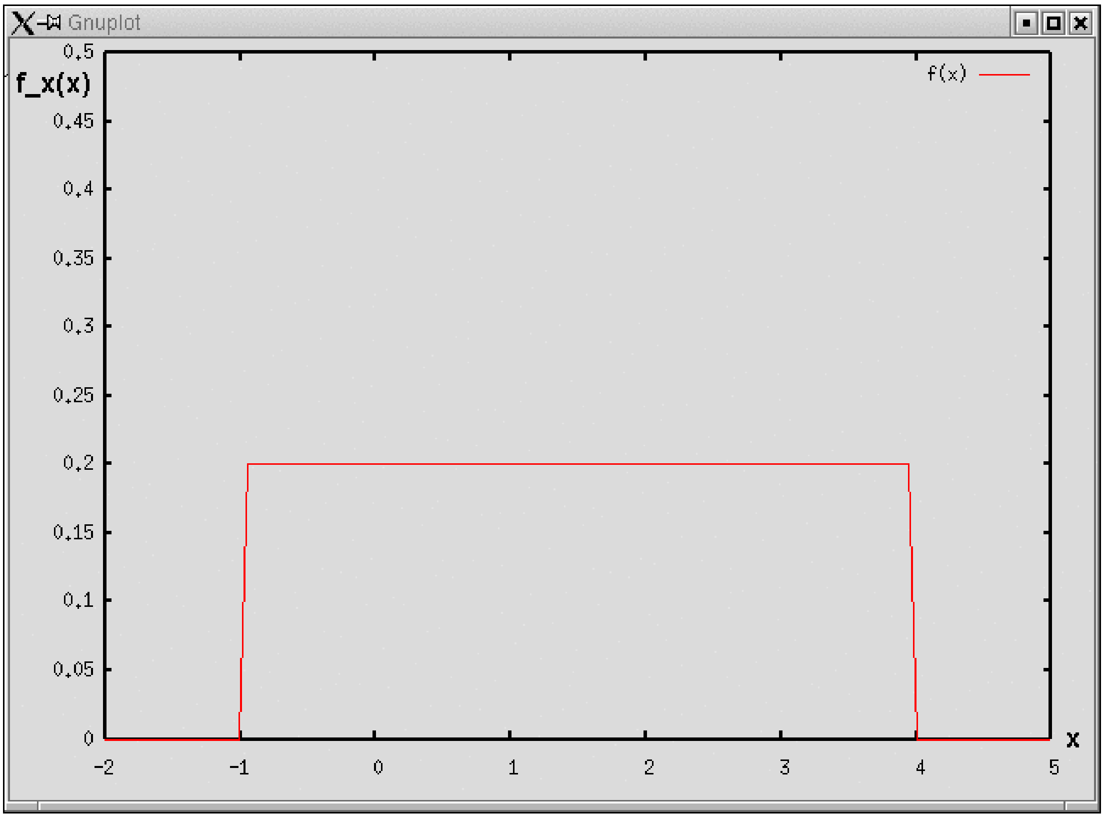
(γ) Έχουμε ότι:

- $y \leq 0\,,\quad F_Y(y) = P(Y \leq y) = 0$
- $y \geq 3\,,\quad F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1$
- $0 \leq y \leq 2$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(2 - y \leq X \leq 2 + y) \\ &= \frac{1}{5}\,[(2+y) - (2-y)] = 0.4\,y \end{aligned}$$

- $2 \leq y \leq 3$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(2 - y \leq X \leq 4) \\ &= \frac{1}{5}\,[4 - (2-y)] = 0.2\,(2+y) \end{aligned}$$



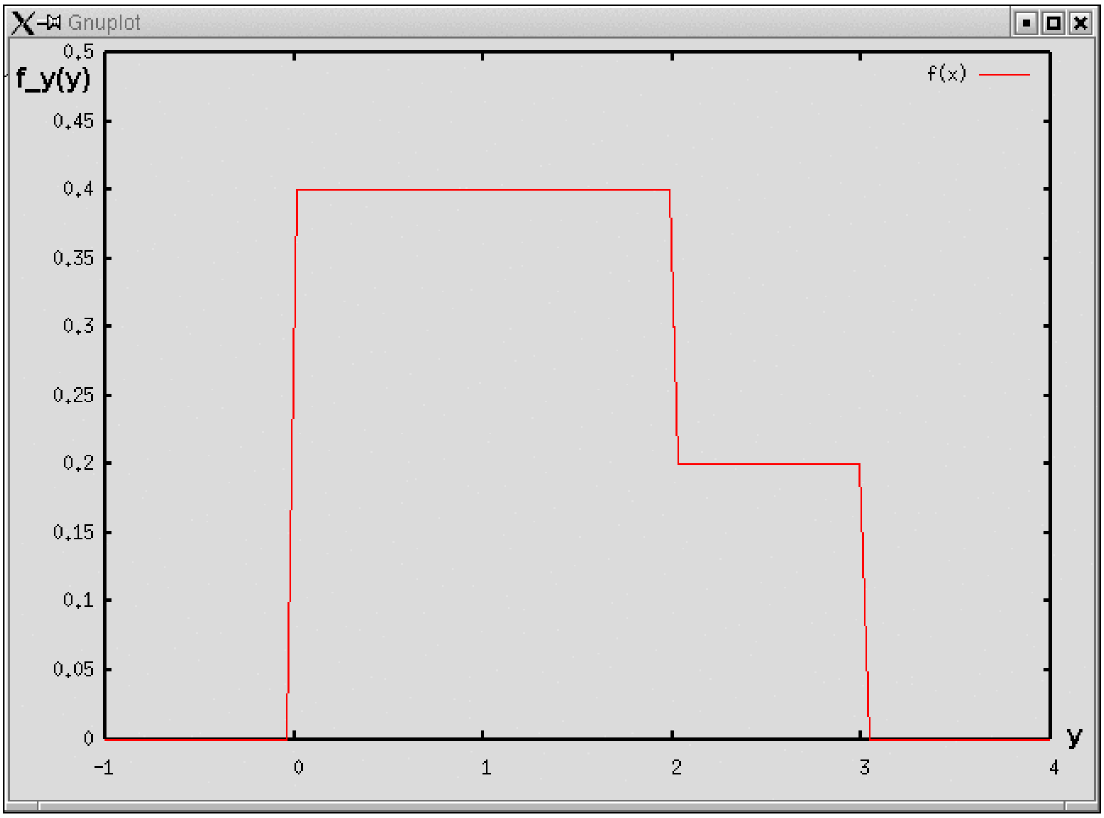
Σχήμα 3: Γραφική παράσταση της $f_X(x)$

Οπότε έχουμε:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 0.4\,y & 0 \leq y \leq 2 \\ 0.2\,(2+y) & 2 \leq y \leq 3 \\ 1 & y \geq 3 \end{cases}$$

Συνεπώς,

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y} = \begin{cases} 0.4 & 0 \leq y \leq 2 \\ 0.2 & 2 \leq y \leq 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



Σχήμα 4: Γραφική παράσταση της $f_Y(y)$