

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
Διάρκεια: 3 Ωρες

Θέμα 1 - 20 μονάδες. Βασικές Έννοιες Κατανομών.

Θεωρήστε δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) X και Y , όπου κάθε μία είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[0, 2]$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις δύο τ.μ., κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλάτος X και μήκος Y .

- (α) Βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.
- (β) Βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά της επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.
- (γ) Μας δίδεται η πληροφορία ότι η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι μεγαλύτερη από 4 μονάδες μήκους. Δεδομένης αυτής της πληροφορίας, υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι η επιφάνειά του είναι μεγαλύτερη από 1.

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Μέσες τιμές, διασπορές και συσχετίσεις.

(α) Έστω οι τ.μ. X και Y με την ίδια κατανομή, όχι απαραίτητα ανεξάρτητες. Δείξτε ότι

$$\text{cov}(X + Y, X - Y) = 0.$$

(β) Έστω Z μία τυπική κανονική τ.μ.: $Z \sim N(0, 1)$.

- (i) Δείξτε ότι η n -στή ροπή της Z είναι μηδέν, $E[Z^n] = 0$, για n περιττό.
- (ii) Υπολογίστε τη συνδιασπορά $\text{cov}(Z, Z^2)$.
- (iii) Αν η τ.μ. Y ορίζεται ως $Y = a + bZ + cZ^2$ (a, b, c : σταθερές), δείξτε ότι ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης των Y και Z είναι

$$\rho(Y, Z) = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2c^2}}.$$

Θέμα 3 - 20 μονάδες. Κανονική Κατανομή.

Το σήμα $s = 2$ μεταδίδεται από ένα δορυφόρο σε έναν επίγειο δέκτη. Κατά τη μετάδοση, επηρεάζεται από μία συνιστώσα τυχαίου θορύβου W έτσι ώστε το σήμα που λαμβάνεται στο δέκτη να είναι $X = s + W$. Όταν ο καιρός είναι καλός, πράγμα που συμβαίνει με πιθανότητα $2/3$, η τ.μ. W ακολουθεί την κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και διασπορά 1. Όταν ο καιρός είναι κακός, η W ακολουθεί την κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και διασπορά 9.

- (α) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X .
- (β) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι η ληφθείσα τιμή στο δέκτη βρίσκεται μεταξύ 1 και 3, δηλαδή υπολογίστε την $P(1 \leq X \leq 3)$. (Εκφράστε την απάντησή σας βάσει των τιμών $\Phi(1)$ και $\Phi(1/3)$ της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής.)

Θέμα 4 - 20 μονάδες. Εκθετική Κατανομή.

Έστω X και Y ανεξάρτητες τ.μ. εκθετικά κατανεμημένες με μέση τιμή 1.

- (α) Βρείτε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των X και Y , $f_{X,Y}(x, y)$.
- (β) Βρείτε τη μέση τιμή της απόλυτης τιμής της διαφοράς τους, $E[|X - Y|]$.

Θέμα 5 - 20 μονάδες. Μετασχηματισμοί Τυχαίων Μεταβλητών.

Έστω ότι η τ.μ. X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[-1, 4]$. Η X μετασχηματίζεται στην τ.μ. $Y = |X - 2|$.

- (α) Δώστε τη γραφική παράσταση του μετασχηματισμού και βρείτε το πεδίο τιμών της τ.μ. Y .
- (β) Βρείτε τη μέση τιμή της τ.μ. Y , $E[Y]$.
- (γ) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_Y(y)$, και κατόπιν τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_Y(y)$, της τ.μ. Y .