ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2004
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Έκτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 8/12/2004 Ημερομηνία Παράδοσης: 11/01/2005

Άσκηση 1.

(α) Από τις ιδιότητες μιας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας έχουμε ότι:

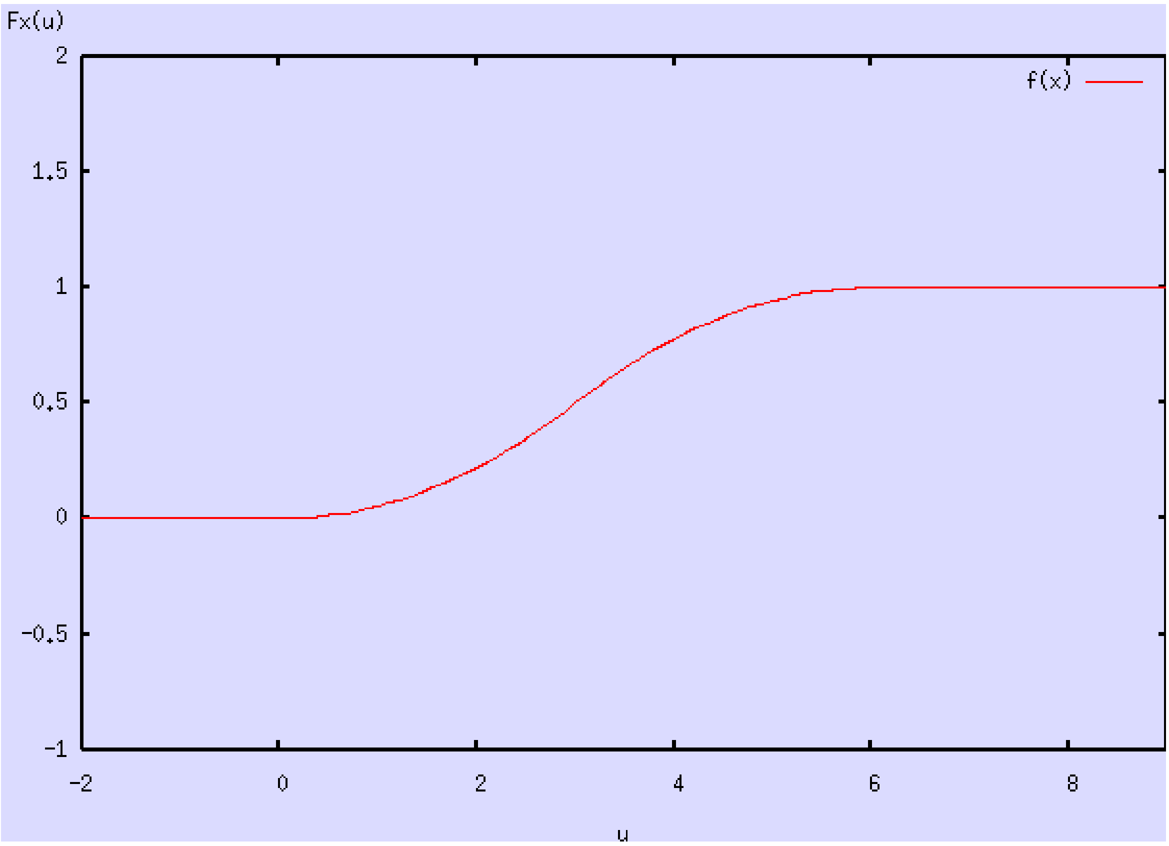
$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\,du + c\int_{-\infty}^{+\infty}(6-u)\,du = 9c$$

Άρα, $c = 1/9$.

(β) Επειδή έχουμε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή, θα ισχύει ότι: $F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(u)\,du$. Οπότε θα έχουμε:

$$F_X(a) = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ \frac{1}{9}\int_0^a u\,du = \frac{a^2}{18}, & 0 \le a < 3 \\ \frac{1}{9}\int_0^3 u\,du + \frac{1}{9}\int_3^a (6-u)\,du = \frac{1}{2} - \frac{1}{18}(6-u)^2\Big|_3^a = 1 - \frac{(6-a)^2}{18}, & 3 \le a < 6 \\ 1, & a \ge 6 \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της $F_X(u)$ φαίνεται στο σχήμα 1



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της $F_X(u)$

(γ) Είναι εύκολα αντιληπτό ότι η $F_X(u)$ είναι μη φθίνουσα και ότι $0 \leq F_X(u) \leq 1$ για κάθε τιμή του u, τόσο από το παραπάνω σχήμα όσο και από την ανάλυση των συναρτήσεων $u^2/18$ και $1-(6-u)^2/18$ στα διαστήματα $[0,3]$ και $[3,6]$ αντίστοιχα. Επιπλέον, ισχύει ότι: $F_X(-\infty) = F_X(0) = 0$ και $F_X(+\infty) = F_X(6) = 1$. Τέλος, είναι εύκολα αντιληπτό ότι η $F_X(u)$ είναι συνεχής παντού, ακόμη και στα σημεία $u = 0, u = 3$ και $u = 6$.

(δ) Έχουμε ότι:

$$P(A) = P(X > 3) = 1 - F_X(3) = 0.5$$

Παρομοίως:

$$P(B) = P(1.5 \leq X \leq 9) = P(X \leq 9) - P(X < 1.5) = F_X(9) - F_X(1.5^-) = 1 - 0.125 = 0.875$$

(ε) Η τομή των A και B είναι το γεγονός $\{3 < X \leq 9\}$. Άρα,

$$P(AB) = P(3 < X \leq 9) = P(X > 3) = 0.5 = P(A) \neq P(A)\,P(B)$$

Επομένως, τα δύο γεγονότα δεν είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 2.

Έστω ότι με X δηλώνουμε τον επιλεγμένο αριθμό. Τότε η X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή, ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $(0,1)$. Θα έχουμε:

(α) $P(0.1 \leq X < 0.2) = 0.2 - 0.1 = 0.1$.

(β) $P(\text{second digit} = 2) = \sum_{k=0}^{9} P(0.k2 \leq X < 0.k3) = 10 \cdot 0.01 = 0.1$.

(γ) $P(0.3 \leq \sqrt{X} < 0.4) = P(0.09 \leq X < 0.16) = 0.07$.

Άσκηση 3. Έστω ότι με C δηλώνουμε την διάρκεια ζωής ενός εξαρτήματος και με Φ την συνάρτηση κανονικής κατανομής. Έχουμε:

$$\begin{aligned} P\{C < 1.8 \times 10^6\} &= \Phi\left(\frac{1.8 \times 10^6 - 1.4 \times 10^6}{3 \times 10^5}\right) \\ &= \Phi(1.33) \\ &= 0.982 \end{aligned}$$

Επομένως, αν N είναι ο αριθμός των εξαρτημάτων με διάρκεια ζωής μικρότερη από 1.8×10^6, τότε η N είναι δυωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους $(100, 0.982)$. Συνεπώς,

$$P(N > 19.5) \approx 1 - \phi\left(\frac{19.5 - 90.82}{90.82 \cdot 0.0918}\right) = 1 - \phi(-24.7) \approx 1$$

Άσκηση 4.

Έστω ότι Z είναι η τυχαία μεταβλητή κανονικής κατανομής.

(α)

$$\begin{aligned} P\left\{\sum_{i=1}^{4} X_i > 0\right\} &= P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{4} X_i - 6}{\sqrt{24}} > \frac{-6}{\sqrt{24}}\right\} \\ &\approx P(Z > -1.2247) \approx 0.8897 \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} P\left\{\sum_{i=1}^{4} X_i > 0 \middle| \sum_{i=1}^{2} X_i = -5\right\} &= P\{X_3 + X_4 > 5\} \\ &= P\left\{\frac{X_3 + X_4 - 3}{\sqrt{12}} > 2/\sqrt{12}\right\} \\ &\approx P\{Z > 0.5774\} \approx 0.2818 \end{aligned}$$

(γ)

$$\begin{aligned} P\left\{\sum_{i=1}^{4} X_i > 0 \middle| X_i = 5\right\} &= P\{X_2 + X_3 + X_4 > -5\} \\ &= P\left\{\frac{X_2 + X_3 + X_4 - 4.5}{\sqrt{18}} > -9.5/\sqrt{18}\right\} \\ &\approx P\{Z > -2.239\} \approx 0.9874 \end{aligned}$$

Άσκηση 5.

(α) Ναι διότι είναι οι παράγοντες της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας.

(β) $f_X(x) = x \int_0^2 y\,dy = 2x, \qquad 0 < x < 1$

(γ) $f_Y(y) = y \int_0^1 x\,dx = y/2, \qquad 0 < y < 2$

(δ)

$$\begin{aligned} P\{X < x, Y < y\} &= P\{X < x\} \cdot P\{Y < y\} \\ &= \min(1, x^2) \cdot \min(1, y^2/4), \qquad x > 0, y > 0 \end{aligned}$$

(ε) $E[Y] = \int_0^2 y^2/2\,dy = 4/3$

(στ)

$$\begin{aligned} P\{X + Y < 1\} &= \int_0^1 x \int_0^{1-x} y\,dy\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx = 1/24 \end{aligned}$$

Άσκηση 6. Εφόσον η X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή, ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0, 2]$, θα ισχύει ότι:

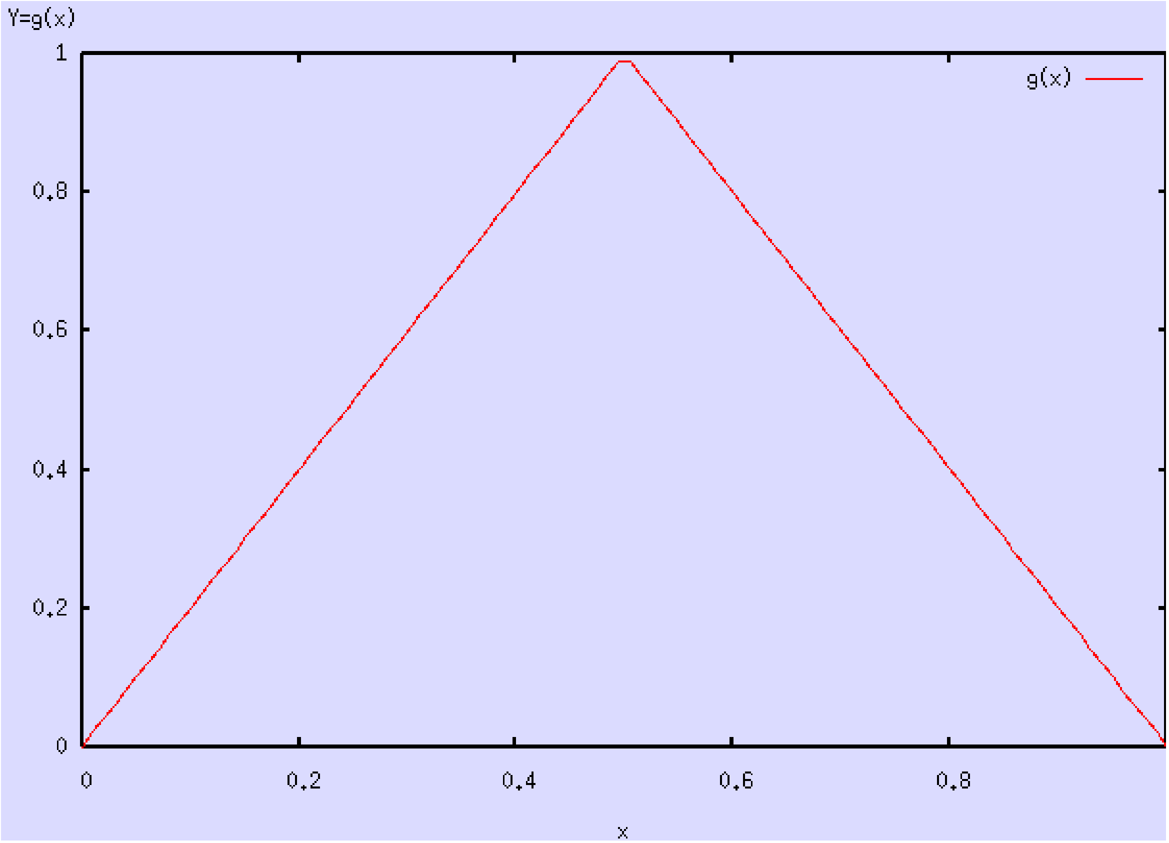
$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Από τον ορισμό της $g(\cdot)$ παρατηρούμε ότι η Y παίρνει τιμές μόνο στο διάστημα $[0, 1]$. Άρα, θα είναι $F_Y(y) = 0, y < 0$, και $F_Y(y) = 1, y > 1$. Για $0 \le y \le 1$, το γεγονός $\{Y = y\}$ εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \{Y = y\} &= \{2X \le y, 0 \le X \le 1/2\} \bigcup \{(2 - 2X) < y, 1/2 \le X \le 1\} \bigcup \{0 \le y, X \le 1\} \\ &= \{0 < X < y/2\} \bigcup \{(1 - y/2) \le X \le 1\} \bigcup \{0 \le y, X \le 1\} \end{aligned}$$

Εφόσον τα γεγονότα της παραπάνω εξίσωσης είναι ξένα μεταξύ τους, παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} F_X(y) &= F_X(y/2) - F_X(0) + F_X(1) - F_X(1 - y/2) + F_X(2) - F_X(1) \\ &= 1/2(y/2 - 0 + 1 - 1 + y/2 + 1) \\ &= (y + 1)/2, \quad 0 \le y \le 1 \end{aligned}$$



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση της $Y = g(X)$

Επομένως,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{y+1}{2}, & 0 \leq y < 1, \\ 1, & y \geq 1. \end{cases}$$

Η $F_Y(y)$ παρουσιάζει ένα άλμα ύψους $1/2$ στο $y = 0$, όπως φαίνεται στο σχήμα 2, υποδηλώνοντας την παρουσία μιας συνάρτησης δέλτα $(\delta(y)/2)$ στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Διαφορίζοντας την $F_Y(y)$ παίρνουμε:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1+\delta(y)}{2}, & 0 \leq y < 1, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Εναλλακτική μέθοδος: Στο διάστημα $0 < y < 1$, η $y = g(x)$ είναι μια διαφοροποιήσιμη συνάρτηση του x. Οι ρίζες για την $y - g(x)$ σε αυτό το διάστημα είναι: $x_1 = y/2, 0 \leq x_1 \leq 1/2$ και $x_2 = (1 - y/2), 1/2 \leq x_2 \leq 1$. Άρα, $|dg/dx_i| = 1/2$, για $i = 1, 2$ και

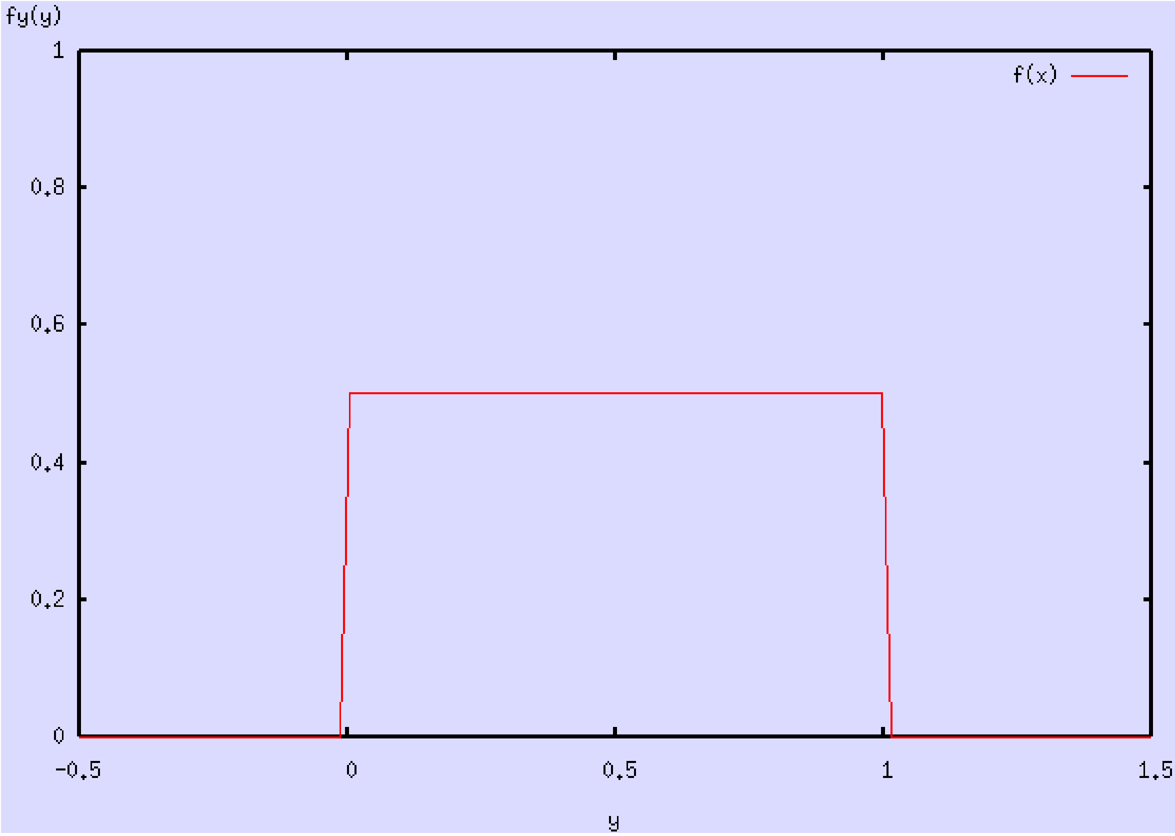
$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \sum_{i=1}^{n} f_X(x_i)/|g'(x_i)| \quad \text{με } x_i = x_i(y),\ g'(x_i) \neq 0 \\ &= f_X(y/2) \cdot 1/2 + f_X(1 - y/2) \cdot 1/2 \\ &= 2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/2, \quad 0 < y < 1 \end{aligned}$$

ενώ

$$P(Y = 0) = P(X > 1) = (2 - 1)/(2 - 0) = 1/2$$

Επομένως, η Y είναι μια μεικτή τυχαία μεταβλητή με ένα διακριτό συστατικό μέρος για $Y = 0$ ενώ χαρακτηρίζεται από μια συνεχή πυκνότητα πιθανότητας για $Y \neq 0$. Χρησιμοποιώντας δέλτα συναρτήσεις, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την Y μπορεί να γραφεί ως:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/2 + \delta(y)/2, & 0 \leq y < 1 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$



Σχήμα 3: Η γραφική παράσταση της $F_Y(y)$

Άσκηση 7.

(α) Πρώτα θα βρούμε τη συνάρτηση κατανομής της X:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(U^2 \leq x) \\ &= P(U \leq \sqrt{x}) = \sqrt{x}, \quad x \in (0,1] \end{aligned}$$

Διαφορίζοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς x παίρνουμε:

$$f_X(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad x \in (0,1]$$

(β) Η συνάρτηση κατανομής της Y είναι:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(U^{1/2} \leq y) \\ &= P(U \leq y^2) = y^2, \quad y \in (0,1] \end{aligned}$$

Επομένως,

$$f_Y(y) = 2y, \quad y \in (0,1]$$

(γ) Η συνάρτηση κατανομής της Z είναι:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(ln(U) \leq z) \\ &= P(U \leq e^z) = e^z, \quad z \leq 0 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$f_Z(z) = e^z, \quad z \leq 0$$

(δ) Η συνάρτηση κατανομής της V είναι:

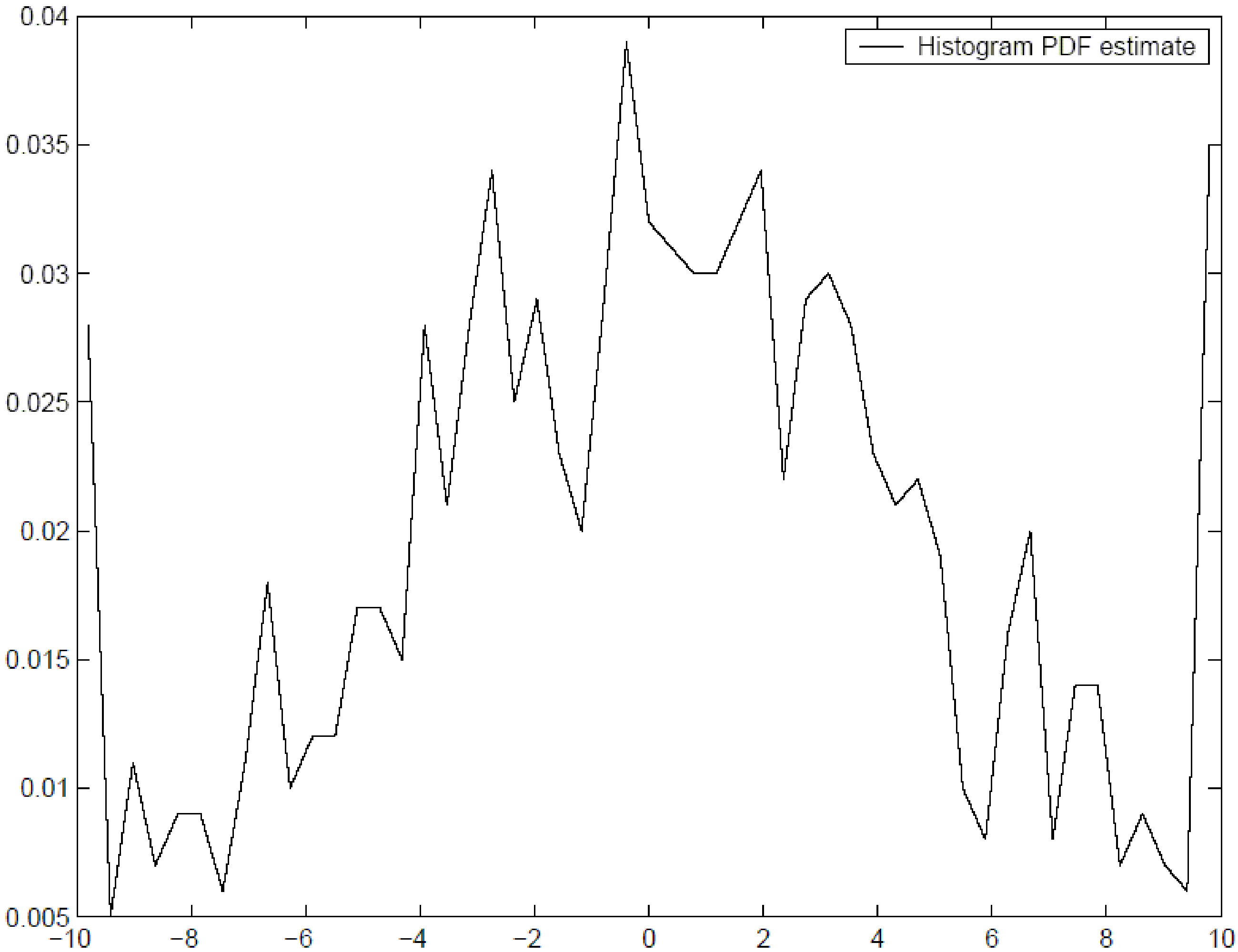
$$\begin{aligned} F_V(z) &= P(V \le v) = P(aU + b \le v) = P(U \le e^z) \\ &= \begin{cases} P(U \le \frac{v-b}{a}), & a > 0 \\ P(U \ge \frac{v-b}{a}), & a < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{v-b}{a}, & a > 0, b < v \le a+b \\ 1 - \frac{v-b}{a}, & a < 0, a+b \le v < b \end{cases} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & a > 0, b < v \le a+b \\ -\frac{1}{a}, & a < 0, a+b \le v < b \end{cases}$$

(ε) Η συνάρτηση πιθανότητας της W θα είναι:

$$\begin{aligned} P_W(w) &= P(W \le w \mid U \ge \frac{1}{2})\, P(U \ge \frac{1}{2}) + P(W \le w \mid U < \frac{1}{2})\, P(U < \frac{1}{2}) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}, & w = 3 \\ \frac{1}{2}, & w = 1 \end{cases} \end{aligned}$$



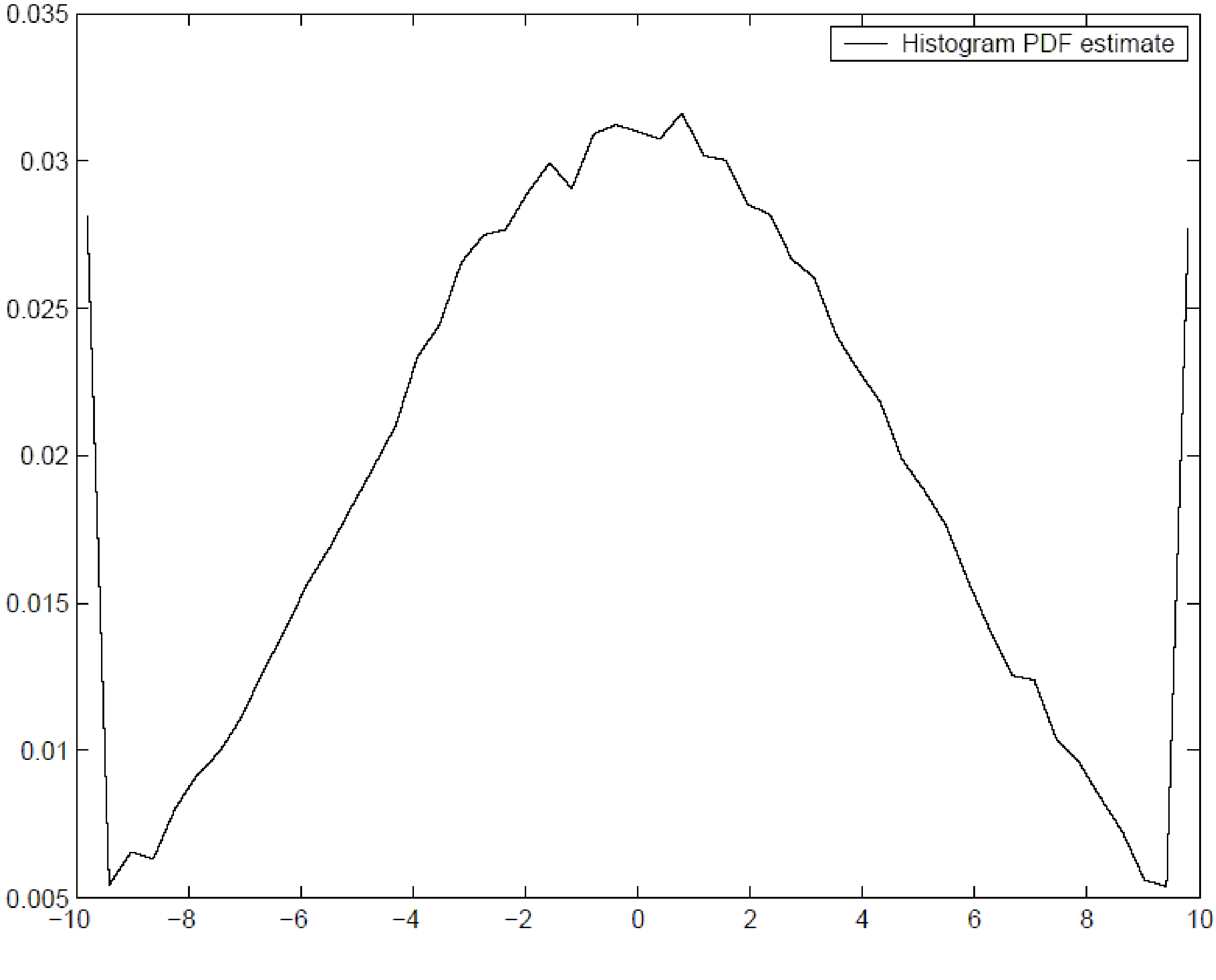
Σχήμα 4: η προσέγγιση της γκαουσσιανής με $N = 10^3$

Άσκηση 8.

(α) Διακρίνουμε 4 περιπτώσεις ανάλογα με την τιμή της Y.

- $Y > 10$ ή $Y < -10$ τότε $f_Y(y) = 0$
- $P(Y = -10) = P(X \leq -10) = P\big(\frac{X-0}{5} \leq -\frac{10}{5}\big) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$
- $P(Y = 10) = P(X \geq 10) = P\big(\frac{X-0}{5} \geq \frac{10}{5}\big) = 1 - \Phi(2)$
- $|Y| < 10$ τότε $f_Y(y) = f_X(x)\big|_{x=y} = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{50\pi}}$

(β) Η προσέγγιση της σ.π.π της Y με $N = 10^3$ και $N = 10^5$ σημεία φαίνεται στα σχήματα 4 και 5 αντίστοιχα. Από ότι παρατηρούμε και από τα διαγράμματα, όσο λιγότερα σημεία έχουμε, τόσο λιγότερα σημεία πέφτουν μέσα στα ισαπέχοντα bins και άρα τόσο χειρότερη είναι η μέτρηση της σχετικής συχνότητας και η προσέγγιση της σ.π.π της τυχαίας μεταβλητής.



Σχήμα 5: η προσέγγιση της γκαουσσιανής με $N = 10^5$

Άσκηση 9.

(α) Αφού $Z = 2(X+Y)(X-Y) = 2(X^2 - Y^2)$, θα έχουμε:

$$E[Z] = 2(E[X^2] - E[Y^2]) = 2(Var(X) - Var(Y) + E^2[X] - E^2[Y]) = -40$$

(β) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} Cov(T,U) &= Cov(2X+Y, 2X-Y) \\ &= 4Cov(X,X) - 2Cov(X,Y) + 2Cov(Y,X) - Cov(Y,Y) \\ &= 4Var(X) - Var(Y) = 7 \end{aligned}$$

(γ) Είναι:

$$\begin{aligned} E[W] &= E[3X+Y+2] = 3E[X] + E[Y] + 2 = 9 \\ Var(W) &= Var(3X+Y+2) = 9Var(X) + Var(Y) + 6Cov(X,Y) = 48.6 \end{aligned}$$

όπου $Cov(X,Y) = \rho\sqrt{Var(X)Var(Y)} = 3.6$.

Άσκηση 10. Το σημαντικό σημείο είναι να παρατηρήσουμε ότι οι $X_1, X_2, \cdots$ είναι τυχαίες ανεξάρτητες μεταβλητές, και επομένως οι Y_n και Y_{n+k} είναι επίσης ανεξάρτητες αν $k \geq 3$. Άρα, $Cov(Y_n, Y_{n+k}) = 0$ αν $k \geq 3$. Τώρα για $k = 0$ έχουμε ότι:

$$Cov(Y_n, Y_n) = Var(Y_n) = Var(X_n + X_{n+1} + X_{n+2}) = Var(X_n) + Var(X_{n+1}) + Var(X_{n+2}) = 3\sigma^2$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ανεξαρτησία των X_n, X_{n+1}, X_{n+2} ακόμη μια φορά. Για $k = 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} Cov(Y_n, Y_{n+1}) &= Cov(X_n + X_{n+1} + X_{n+2}, X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+3}) \\ &= Cov(X_n, X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+3}) + Cov(X_{n+1} + X_{n+2}, X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+3}) \\ &= 0 + Cov(X_{n+1} + X_{n+2}, X_{n+1} + X_{n+2}) + Cov(X_{n+1} + X_{n+2}, X_{n+3}) \\ &= Var(X_{n+1} + X_{n+2}) + 0 = 2\sigma^2 \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τη διγραμμικότητα της συνάρτησης γινομένου απόκλισης συν τη ανεξαρτησία των X_n, X_{n+1}, X_{n+2}. Τελικά, για $k = 2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} Cov(Y_n, Y_{n+2}) &= Cov(X_n + X_{n+1} + X_{n+2}, X_{n+2} + X_{n+3} + X_{n+4}) \\ &= Cov(X_n + X_{n+1}, X_{n+2} + X_{n+3} + X_{n+4}) + Cov(X_{n+2}, X_{n+2} + X_{n+3} + X_{n+4}) \\ &= 0 + Cov(X_{n+2}, X_{n+2}) + Cov(X_{n+2}, X_{n+3} + X_{n+4}) \\ &= Var(X_{n+2}) + 0 = \sigma^2 \end{aligned}$$

όπου η λογική είναι παρόμοια με αυτή της περίπτωσης $k = 1$. Περιληπτικά, έχουμε ότι $Con(Y_n, Y_{n+k}) = (3-k)\sigma^2$ για $k = 0, 1, 2$ και $Con(Y_n, Y_{n+k}) = 0$ για $k \geq 3$.