ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2004
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 8/12/2004 Ημερομηνία Παράδοσης: 17/12/2004

Άσκηση 1. Η ποσότητα ψωμιού (σε χιλιάδες κιλά) που πουλάει ένα αρτοποιείο κατά τη διάρκεια μιας ημέρας είναι συνεχής τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \begin{cases} cx & 0 \le x < 3 \\ c(6-x) & 3 \le x < 6 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c.
(β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (ΑΣΚ), $F_X(x)$, της τ.μ. X.
(γ) Δώστε τη γραφική παράσταση της $F_X(x)$ και δείξτε ότι είναι μία έγκυρη ΑΣΚ.
(δ) Ποια η πιθανότητα ότι σε μία ημέρα θα πουληθούν: (i) περισσότερα από 300 κιλά ψωμί, (ii) μεταξύ 150 και 900 κιλών ψωμί;
(ε) Αν A και B είναι τα γεγονότα (i) και (ii), αντίστοιχα, είναι τα A και B ανεξάρτητα;

Άσκηση 2. Ένας αριθμός επιλέγεται τυχαία στο διάστημα $(0,1)$, με άλλα λόγια ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$. Υπολογίστε τις πιθανότητες των ακόλουθων γεγονότων:

(α) το πρώτο δεκαδικό ψηφίο του να είναι 1.
(β) το δεύτερο δεκαδικό ψηφίο του να είναι 2.
(γ) το πρώτο δεκαδικό ψηφίο της τετραγωνικής ρίζας του να είναι 3.

Άσκηση 3. Η διάρκεια της ζωής για μία κατηγορία ηλεκτρονικών εξαρτημάτων τα οποία παράγει μία εταιρία ημιαγωγών ακολουθεί κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu = 1.4 \times 10^6$ ώρες και $\sigma = 3 \times 10^5$ ώρες. Ποια είναι η πιθανότητα ότι ένα κιβώτιο 100 εξαρτημάτων θα περιέχει τουλάχιστον 20 εξαρτήματα των οποίων η διάρκεια ζωής είναι μικρότερη από 1.8×10^6 ώρες.

Χρησιμοποιείστε ότι $\Phi(1.33) = 0.9082$.

Άσκηση 4. Ένα στατιστικό μοντέλο που έχει προταθεί για το επαγγελματικό πρωτάθλημα μπάσκετ των ΗΠΑ προβλέπει ότι όταν συναντώνται δύο σχετικά ισοδύναμες ομάδες, ο αριθμός των πόντων που σκοράρει σε μία περίοδο η εντός έδρας ομάδα μείον τον αριθμό των πόντων που σκοράρει η φιλοξενούμενη ομάδα είναι μία κανονική τ.μ. με μέση τιμή 1.5 και διασπορά 6. Επίσης, το μοντέλο υποθέτει ότι οι διαφορές σκοραρίσματος κατά τις 4 περιόδους είναι ανεξάρτητες τ.μ.

(α) Ποια η πιθανότητα να κερδίσει η εντός έδρας ομάδα;
(β) Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει η εντός έδρας ομάδα δεδομένου ότι στο ημίχρονο είναι πίσω στο σκορ κατά 5 πόντους;
(γ) Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα να κερδίσει η εντός έδρας ομάδα δεδομένου ότι στο τέλος της πρώτης περιόδου προηγείται με 5 πόντους;

Άσκηση 5. Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. X και Y είναι

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xy & 0< x< 1,\ \ 0< y< 2 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α) Είναι οι τ.μ. X και Y ανεξάρτητες;
(β) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X.
(γ) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y.
(δ) Υπολογίστε την από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής.
(ε) Βρείτε την $E[Y]$.
(στ) Βρείτε την $P(X+Y< 1)$.

Άσκηση 6. Έστω X συνεχής τ.μ. ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0,2]$. Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $Y = g(X)$, όπου ο μετασχηματισμός $g(\cdot)$ ορίζεται ως

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 2x & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2-2x & \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Άσκηση 7. Έστω η συνεχής τ.μ. U ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0,1]$. Υπολογίστε τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των εξής τ.μ.

(α) $X(U) = |U|^2$
(β) $Y(U) = \sqrt{U}$
(γ) $Z(U) = \ln|U|$
(δ) $V(U) = aU + b$, όπου a και b είναι σταθερές
(ε) Βρείτε τη συνάρτηση πιθανότητας της διακριτής τ.μ. που ορίζεται ως εξής: $W(U) = 3$ αν $U \ge 1/2$ και $W(U) = 1$ αλλιώς.

Άσκηση 8. Δειγματοληπτούμε το σήμα εξόδου ενός μικροφώνου και θεωρούμε τις μετρήσεις μας ως πειραματικές τιμές μιας Γκαουσιανής τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) X με μηδενική μέση τιμή ($\mu_X = 0$) και τυπική απόκλιση ίση με 5 Volts ($\sigma_X = 5$). Η έξοδος του μικροφώνου τροφοδοτείται σε ένα ενισχυτή. Για την αποφυγή της υπερφόρτωσης του ενισχυτή, χρησιμοποιούμε ένα κύκλωμα αποκοπής (clipping circuit):

$$Y = c(X) = \begin{cases} X, & |X| \le 10 \\ -10, & X< -10 \\ 10, & X > 10 \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε θεωρητικά τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της τ.μ. Y.
(β) Γράψτε ένα απλό πρόγραμμα (σε MATLAB) για να δημιουργήσετε $N = 10^3$ πειραματικές τιμές των τ.μ. X και Y. Χρησιμοποιείστε τη συνάρτηση `randn()` της MATLAB για τη δημιουργία των τιμών της τ.μ. X. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `hist()` της MATLAB δώστε τη γραφική παράσταση της προσέγγισης της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. Y (το λεγόμενο και *ιστόγραμμα* της Y) και συγκρίνετέ την με την ακριβή γραφική παράσταση της σ.π.π. της Y που έχετε υπολογίσει στο (α).
(γ) Επαναλάβετε το βήμα (β) για $N = 10^5$. Τι παρατηρείτε στην προσέγγιση της σ.π.π. της Y;

Υπόδειξη: Ένα MATLAB primer μπορείτε να βρείτε στην ιστοσελίδα του μαθήματος. Για την γραφική παράσταση του ιστογράμματος, χρησιμοποιείστε τις ακόλουθες εντολές:

```
miny = min(y);
maxy = max(y);
NumBins = 51;
h = hist(y,NumBins);
```

```
for k=1:NumBins,
bincenters(k) = miny + ((maxy-miny)/NumBins)*(k-1/2);
end
h = h / sum(h); % normalize PDF estimate
plot(bincenters,h);
legend('Histogram PDF estimate');
```

Άσκηση 9. Έστω X και Y τ.μ. με $E[X] = 1$, $E[Y] = 4$, $var(X) = 4$, $var(Y) = 9$, και συντελεστή συσχέτισης $\rho_{X,Y} = 0.1$.

(α) Αν $Z = 2(X+Y)(X-Y)$, βρείτε την $E[Z]$.
(β) Αν $T = 2X + Y$ και $U = 2X - Y$, βρείτε την συνδιασπορά των τ.μ. T και U, $cov(T, U)$.
(γ) Αν $W = 3X + Y + 2$, βρείτε τις $E[W]$ και $var(W)$.

Άσκηση 10. Έστω $X_1, X_2, \ldots$ μία αριθμήσιμα άπειρη ακολουθία ανεξάρτητων, όμοια κατανεμημένων τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Ορίζουμε τις τ.μ. $Y_n = X_n + X_{n+1} + X_{n+2}$, για $n = 1, 2, \ldots$. Για κάθε $k \geq 0$, υπολογίστε τις συνδιασπορές $cov(Y_n, Y_{n+k})$.