ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2004
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 19/11/2004 Ημερομηνία Παράδοσης: 24/11/2004

Άσκηση 1.

(α) Υποθέτοντας ότι το αποτέλεσμα της ρίψης ζαριού είναι $X = x$, ο αριθμός των κεφαλών, Y, σε μια σειρά από x ρίψεις ενός αμερόληπτου νομίσματος θα είναι μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} p_{Y|X}(y \mid x) &= \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^{y} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-y} \\ &= \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^{x}, \end{aligned}$$

όπου $1 \le x \le 4$ και $0 \le y \le x$, αφού ο αριθμός των κεφαλών δεν μπορεί να υπερβαίνει τον αριθμό των ρίψεων του νομίσματος.
Παρουσιάζουμε την παραπάνω πιθανότητα με την βοήθεια του παρακάτω πίνακα:

X/Y	0	1	2	3	4
1	1/2	1/2	–	–	–
2	1/4	1/2	1/4	–	–
3	1/8	3/8	3/8	1/8	–
4	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

(β) Η κοινή συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ. X και Y μπορεί να ευρεθεί σημειώνοντας ότι:

$$p_X(x) = \frac{1}{4},\ 1 \le x \le 4$$

και με την χρησιμοποίηση του κανόνα της αλυσίδας. Επομένως,

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x,y) &= p_{Y|X}(y \mid x) \cdot p_X(x) \\ &= \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \frac{1}{4} = \binom{x}{y} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}, \end{aligned}$$

όπου $1 \le x \le 4$ και $0 \le y \le x$. Η παραπάνω ζητούμενη πιθανότητα γράφεται και σε μορφή πίνακα ως εξής:

X/Y	0	1	2	3	4
1	1/8	1/8	–	–	–
2	1/16	1/8	1/16	–	–
3	1/32	3/32	3/32	1/32	–
4	1/64	1/16	3/32	1/16	1/64

(γ) Για την οριακή συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. Y ξέρουμε ότι:

$$p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x, y)$$

Πρέπει να προσέξουμε τα όρια του παραπάνω αθροίσματος ως προς το x. $Y = y$ είναι ο αριθμός των κεφαλών σε μια σειρά από $X = x$ ρίψεις νομισμάτων. Οπότε θα πρέπει να είναι $x \geq y$. Στην ειδική περίπτωση που το $y = 0$, το x μπορεί να πάρει τιμές από το σύνολο $\{1, 2, 3, 4\}$. Επομένως, η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. Y μπορεί να γραφθεί σε μια πιο συμπαγής μορφή ως εξής:

$$p_Y(y) = \sum_{x=max(y,1)}^{4} p_{X,Y}(x, y)$$

Το προηγούμενο άθροισμα μπορεί να μεταφραστεί στις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
p_Y(0) &= p_{X,Y}(1,0) + p_{X,Y}(2,0) + p_{X,Y}(3,0) + p_{X,Y}(4,0),\\
p_Y(1) &= p_{X,Y}(1,1) + p_{X,Y}(2,1) + p_{X,Y}(3,1) + p_{X,Y}(4,1),\\
p_Y(2) &= p_{X,Y}(2,2) + p_{X,Y}(3,2) + p_{X,Y}(4,2),\\
p_Y(3) &= p_{X,Y}(3,3) + p_{X,Y}(4,3),\\
p_Y(4) &= p_{X,Y}(4,4).
\end{aligned}$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραπάνω τιμές χρησιμοποιώντας τον πίνακα από το μέρος (β) της άσκησης. Βρίσκουμε, λοιπόν, ότι:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{15}{64}, & y = 0\\ \frac{13}{32}, & y = 1\\ \frac{1}{4}, & y = 2\\ \frac{3}{32}, & y = 3\\ \frac{1}{64}, & y = 4\\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Εν τέλει, για να βρούμε την υποθετική συνάρτηση πιθανότητας της X δεδομένου της Y, σημειώνουμε ότι:

$$p_{X|Y}(x \mid y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$$

Η ζητούμενη συνάρτηση πιθανότητας γράφεται και σε μορφή πίνακα ως εξής:

X/Y	0	1	2	3	4
1	8/15	4/13	–	–	–
2	4/15	4/13	1/4	–	–
3	2/15	3/13	3/8	1/3	–
4	1/15	2/13	3/8	2/3	1

(δ) Η αναμενόμενη τιμή της τ.μ. Y μπορεί να υπολογισθεί με τη χρήση του θεωρήματος ολικής μέσης τιμής ως εξής:

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{x=1}^{4} p_X(x) \cdot E[Y \mid X = x] \\ &= \sum_{x=1}^{4} p_X(x) \cdot \frac{x}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \sum_{x=1}^{4} x \\ &= \frac{1}{8} \cdot (1+2+3+4) = \frac{10}{8} = 1.25 \end{aligned}$$

Στον παραπάνω υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε το γεγονός πως δεδομένου ότι $X = x$, η τυχαία μεταβλητή Y είναι διωνυμική με $p = \frac{1}{2}$, οπότε η μέση τιμή της θα είναι:

$$E[Y \mid X = x] = x \cdot p = x \cdot \frac{1}{2}$$

Άσκηση 2. Έστω ότι X δηλώνει την ποσότητα χρόνου (σε ώρες) εως ότου ο ανθρακωρύχος να φθάσει στην έξοδο. Επίσης, έστω ότι Y δηλώνει την σήραγγα που αρχικά επιλέγει. Είναι:

$$\begin{aligned} E[X] &= E[X \mid Y=1]P\{Y=1\} + E[X \mid Y=2]P\{Y=2\} + E[X \mid Y=3]P\{Y=3\} \\ &= \frac{1}{3}\left(E[X \mid Y=1] + E[X \mid Y=2] + E[X \mid Y=3]\right) \end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned} E[X \mid Y=1] &= 3 \\ E[X \mid Y=2] &= 5 + E[X] \\ E[X \mid Y=3] &= 7 + E[X] \end{aligned} \tag{1}$$

Για να καταλάβετε γιατί το σύνολο εξισώσεων (;;) είναι σωστό, θεωρήστε για παράδειγμα την δεύτερη εξίσωση $E[X \mid Y = 2]$. Αν ο ανθρακωρύχος διαλέξει την δεύτερη σήραγγα, θα ξοδέψει 5 ώρες στην σήραγγα και έπειτα θα ξαναγυρίσει πίσω στο ίδιο μέρος από το οποίο ξεκίνησε στην στοά. Αλλά όταν γυρίσει πίσω, το πρόβλημα είναι σαν να ξεκινάει από την αρχή. Οπότε, ο αναμενόμενος επιπρόσθετος χρόνος για να φθάσει στην έξοδο θα είναι απλώς $E[X]$. Επομένως, $E[X \mid Y = 2] = 5 + E[X]$. Παρόμοιο επιχείρημα θα ισχύει και για τις άλλες εξισώσεις του συνόλου εξισώσεων (;;). Συνεπώς,

$$E[X] = \frac{1}{3}\left(3 + 5 + E[X] + 7 + E[X]\right)$$

ή

$$E[X] = 15$$

Άσκηση 3.

(α)

$$\begin{aligned}
E\{Y\} &= \sum_y y\, P(Y=y) = \sum_y y \sum_{n=1}^{\infty} P(Y=y, N=n) \\
&= \sum_y y \sum_{n=1}^{\infty} P(X_1+\cdots+X_n=y, N=n) \\
&= \sum_y y \sum_{n=1}^{\infty} P(X_1+\cdots+X_n=y)P(N=n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) \sum_y y\, P(X_1+\cdots+X_n=y) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n)\, E\{X_1+\cdots+X_n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) \sum_{i=1}^{n} E\{X_i\} = \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n)\, n\, \mu \\
&= \mu \sum_{n=1}^{\infty} n\, P(N=n) = \mu\, E\{N\}.
\end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned}
E\{Y^2\} &= \sum_y y^2\, P(Y=y) = \sum_y y^2 \sum_{n=1}^{\infty} P(Y=y, N=n) \\
&= \sum_y y^2 \sum_{n=1}^{\infty} P(X_1+\cdots+X_n=y, N=n) \\
&= \sum_y y^2 \sum_{n=1}^{\infty} P(X_1+\cdots+X_n=y)P(N=n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) \sum_y y^2\, P(X_1+\cdots+X_n=y) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n)\, E\{(X_1+\cdots+X_n)^2\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) \big\{Var(X_1+\cdots+X_n) + (E\{X_1+\cdots+X_n\})^2\big\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) \big\{\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + (n\mu)^2\big\} = \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) \big\{n\sigma^2 + n^2\mu^2\big\} \\
&= \sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\, P(N=n) + \mu^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, P(N=n) = \sigma^2 E\{N\} + \mu^2 E\{N^2\}.
\end{aligned}$$

(γ)

$$\begin{aligned}
Var(Y) &= E\{Y^2\} - (E\{Y\})^2 = \sigma^2 E\{N\} + \mu^2 E\{N^2\} - (\mu E\{N\})^2 \\
&= \sigma^2 E\{N\} + \mu^2 \big(E\{N^2\} - (E\{N\})^2\big) = \sigma^2 E\{N\} + \mu^2 Var(N).
\end{aligned}$$