ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2004
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων:
Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Ημερομηνία Ανάθεσης: 19/11/2004 Ημερομηνία Παράδοσης: 24/11/2004

Άσκηση 1. Ρίχνουμε ένα δίκαιο τετράεδρο ζάρι. Έστω η τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X, ο αριθμός που έρχεται. Παίρνουμε στη συνέχεια ένα αμερόληπτο νόμισμα και το ρίχνουμε X φορές. Έστω Y ο αριθμός των κεφαλών που έρχονται μετά από αυτή την ακολουθία των X ρίψεων του νομίσματος.

(α) Ποια είναι η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) της τ.μ. Y δεδομένου του ότι το αποτέλεσμα της ρίψης του τετράεδρου ζαριού είναι $X = x$, δηλαδή ποια είναι η $p_{Y/X}(y/x) = P(Y = y/X = x)$, $1 \leq x \leq 4$. Δώστε και το πεδίο τιμών της Y. Γράψτε όλες τις τιμές $P(Y = y/X = x)$ σε ένα πίνακα.
(β) Υπολογίστε την από κοινού σ.π. των τ.μ. X και Y και γράψτε τις τιμές της σε ένα πίνακα.
(γ) Βρείτε την σ.π. της Y, $p_Y(y)$, και την δεσμευμένη σ.π. της X δεδομένης της Y, $p_{X/Y}(x/y)$.
(δ) Βρείτε την μέση τιμή της Y, $E[Y]$, με χρήση του θεωρήματος ολικής μέσης τιμής.

Άσκηση 2. Ένας ανθρακωρύχος είναι παγιδευμένος σε στοά από την οποία ξεκινούν τρεις σήραγγες. Η πρώτη από αυτές οδηγεί στην έξοδο μετά από 3 ώρες πορείας. Η δεύτερη οδηγεί πίσω στη στοά (και στο μέρος από το οποίο ο ανθρακωρύχος ξεκίνησε) μετά από 5 ώρες. Η τρίτη οδηγεί επίσης πίσω στη στοά μετά από 7 ώρες. Αν υποθέσουμε ότι ο ανθρακωρύχος επιλέγει τυχαία και ανεξάρτητα κάθε φορά μία από τις τρεις σήραγγες (δυστυχώς δεν θυμάται τίποτε σχετικά με το ποια σήραγγα επέλεξε την τελευταία φορά...), ποιος είναι ο μέσος χρόνος μέχρι να βρει την έξοδο;

Χρησιμοποιείστε το θεώρημα ολικής μέσης τιμής, ορίζοντας τις κατάλληλες τυχαίες μεταβλητές.

Άσκηση 3. Έστω $X_1, X_2, ...$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που έχουν την ίδια μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Έστω Ν μια τυχαία μεταβλητή που παίρνει ακέραιες θετικές τιμές, είναι ανεξάρτητη από τις X_i, και έχει μέση τιμή $E[N]$ και διασπορά $var(N)$. Ορίζουμε $Y = X_1 + ... + X_N$. Δείξτε ότι:
(α) $E[Y] = \mu E[N]$,
(β) $E[Y^2] = \sigma^2 E[N] + \mu^2 E[N^2]$
(γ) $var(Y) = \sigma^2 E[N] + \mu^2 var(N)$.

Προσέξτε ότι η N είναι μια τ.μ. και επομένως, $P(Y = y) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Y = y, N = n)$.