ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2004
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 01/11/2004 Ημερομηνία Παράδοσης: 15/11/2004

Άσκηση 1.

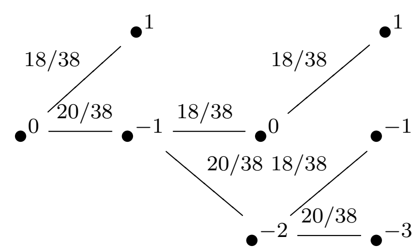
(α) Αν έρθουν n γράμματα και 0 κεφαλές, τότε $X = n$, ενώ αν έρθουν $n-1$ γράμματα και 1 κεφαλή, τότε $X = n-2$. Με τον ίδιο τρόπο, αν έρθουν 1 γράμμα και $n-1$ κεφαλές, τότε $X = -n+2$, ενώ αν έρθουν 0 γράμματα και n κεφαλές, τότε $X = -n$. Συνεπώς, το πεδίο ορισμού της τ.μ. X είναι:

$$n - 2i,\ i = 0, 1,\ \ldots, n$$

(β) Έχουμε 8 δυνατές περιπτώσεις. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.) της τ.μ. X, για την περίπτωση τριών ρίψεων, είναι η εξής:

$$\begin{aligned}
P\{X=3\} &= 1/8 && \text{(Η περίπτωση να φέρουμε μόνο γράμματα)}\\
P\{X=1\} &= 3/8 && \text{(Υπάρχουν 3 περιπτώσεις να φέρουμε 2 γράμματα και 1 κεφαλή)}\\
P\{X=-1\} &= 3/8 && \text{(Υπάρχουν 3 περιπτώσεις να φέρουμε 1 γράμμα και 2 κεφαλές)}\\
P\{X=-3\} &= 1/8 && \text{(Η περίπτωση να φέρουμε μόνο κεφαλές)}
\end{aligned}$$

Άσκηση 2.



Σχήμα 1: Δενδρικό διάγραμμα για την άσκηση 2

(α) Το πεδίο τιμών της τ.μ. X είναι:

$$1, -1, -3$$

Η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X είναι:

$$P_x(x) = \begin{cases} \frac{18}{38} + \frac{20}{38}\left(\frac{18}{38}\right)^2 = 0.592 & ,x = 1\\ 2\frac{18}{38}\left(\frac{20}{38}\right)^2 = 0.262 & ,x = -1\\ \left(\frac{20}{38}\right)^3 = 0.146 & ,x = -3 \end{cases}$$

(β) Η πιθανότητα να κερδίσουμε ισούται με:

$$\begin{aligned} P\{x>0\} &= P\{\text{Κέρδος από το πρώτο στοίχημα}\} + P\{\text{χάσιμο, κέρδος, κέρδος}\} \\ &= 18/38 + (20/38)\,(18/38)^2 \approx 0.5918 \end{aligned}$$

(γ) Το αναμενόμενο κέρδος μας ισούται με την μέση τιμή της τ.μ. X και είναι ίσο με:

$$E[X] = 1[18/38 + (20/38)\,(18/38)^2] - [2\,(18/38)\,(20/38)^2] - \; 3\,(20/38)^3 \approx -0.108$$

Συνεπώς, η στρατηγική που μας προτείνει ο φίλος μας δεν είναι και τόσο καλή διότι στην μέση περίπτωση θα έχουμε χάσιμο.

Άσκηση 3. Θεωρούμε ότι έχουμε να κάνουμε με ένα πείραμα τύχης στο οποίο εκτελούμε 5 ανεξάρτητες δοκιμές Bernouli με πιθανότητα επιτυχίας 0.8. Δηλαδή, το πείραμα τύχης αποτελείται από 5 ανεξάρτητα πειράματα στα οποία το ίδιο γεγονός Α (το bit μεταδόθηκε σωστά) πραγματοποιείται ή όχι με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας ίση με 0.8. Αν X είναι τυχαία μεταβλητή, που μετρά το συνολικό πλήθος επιτυχιών στις 5 δοκιμές, τότε η X έχει τη δυωνυμική κατανομή $B\,(5, 0.8)$. Συνεπώς, η X θα έχει συνάρτηση πιθανότητας $P\,(X=x) = \binom{5}{x}\,(0.8)^x\,(0.2)^{5-x}$. Η πιθανότητα λανθασμένης απόφασης ισούται με την (δυωνυμική) πιθανότητα δύο από τα πέντε bits να έχουν μεταδωθεί σωστά συν την (δυωνυμική) πιθανότητα ένα από τα πέντε bits να έχουν μεταδωθεί σωστά συν την (δυωνυμική) πιθανότητα κανένα από τα πέντε bits να μην έχει μεταδωθεί σωστά. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με:

$$P\,(X=2) + P\,(X=1) + P\,(X=0) = \binom{5}{2}\,(0.8)^2\,(0.2)^3 + \binom{5}{1}\,(0.8)\,(0.2)^4 + (0.2)^5$$

Άσκηση 4. Το δορυφορικό σύστημα θα πρέπει να λειτουργεί καλά τόσο σε περίπτωση βροχής όσο και σε περίπτωση λιακάδας. Δηλαδή:

$$P\,(\text{Καλά}) = P\,(\text{Καλά} \cap \text{Βροχή}) + P\,(\text{Καλά} \cap \text{Λιακάδα})$$

Η πιθανότητα το δορυφορικό σύστημα να λειτουργεί καλά και να βρέχει ισούται με:

$$P\,(\text{Καλά} \cap \text{Βροχή}) = P\,(\text{Καλά} \mid \text{Βροχή})\,P\,(\text{Βροχή})$$

Τώρα, για να βρούμε την πιθανότητα ότι το σύστημα δουλεύει καλά δεδομένου ότι βρέχει, εργαζόμαστε όπως στην προηγούμενη άσκηση. Θεωρούμε ότι εκτελούμε ένα πείραμά τύχης n ανεξάρτητες φορές με πιθανότητα επιτυχίας p_1. Δηλαδή, το πείραμα τύχης αποτελείται από n ανεξάρτητα πειράματα στα οποία το ίδιο γεγονός Α (ένα εξάρτημα λειτουργεί καλά) πραγματοποιείται ή όχι με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας ίση με p_1. Άρα, η πιθανότητα να έχουμε x επιτυχίες, δηλαδή x εξαρτήματα να λειτουργούν καλά (δεδομένου ότι βρέχει), θα ισούται με: $P\,(X=x) = \binom{n}{x}\,(p_1)^x\,(1-p_1)^{n-x}$. Για να λειτουργεί το δορυφορικό σύστημα καλά δεδομένου ότι βρέχει, θα πρέπει τουλάχιστον k εξαρτήματα να λειτουργούν καλά (δηλαδή να έχουμε τουλάχιστον k επιτυχίες), άρα η αντίστοιχη πιθανότητα θα ισούται με:

$$P\,(\text{Καλά} \mid \text{Βροχή}) = P\,(X \geq k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\,(p_1)^i\,(1-p_1)^{n-i}$$

Επομένως, η πιθανότητα το δορυφορικό σύστημα να λειτουργεί καλά και να βρέχει θα ισούται με:

$$P\,(\text{Καλά} \cap \text{Βροχή}) = P\,(\text{Καλά} \mid \text{Βροχή})\,P\,(\text{Βροχή}) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\,(p_1)^i\,(1-p_1)^{n-i} \cdot p_r$$

Το γεγονός να έχουμε λιακάδα είναι συμπληρωματικό ως προς το γεγονός του να έχουμε βροχή, άρα: $P\left(\text{Λιακάδα}\right) = 1 - P\left(\text{Βροχή}\right) = 1 - p_r$. Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο και για την περίπτωση της λιακάδας θα έχουμε:

$$P\left(\text{Καλά} \cap \text{Λιακάδα}\right) = P\left(\text{Καλά} \mid \text{Λιακάδα}\right) P\left(\text{Λιακάδα}\right) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \left(p_2\right)^i \left(1-p_2\right)^{n-i} \cdot \left(1-p_r\right)$$

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα το δορυφορικό σύστημα να λειτουργεί καλά θα ισούται με:

$$\begin{aligned} P\left(\text{Καλά}\right) &= P\left(\text{Καλά} \cap \text{Βροχή}\right) + P\left(\text{Καλά} \cap \text{Λιακάδα}\right) \\ &= \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \left(p_1\right)^i \left(1-p_1\right)^{n-i} \cdot p_r + \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \left(p_2\right)^i \left(1-p_2\right)^{n-i} \cdot \left(1-p_r\right) \end{aligned}$$

Άσκηση 5. Έχουμε:

$$\begin{aligned} P\{X = n+k \mid X > n\} &= \frac{P\{X = n+k\}}{P\{X > n\}} \\ &= \frac{p\left(1-p\right)^{n+k-1}}{\left(1-p\right)^n} \\ &= p\left(1-p\right)^{k-1} \\ &= P\{X = k\} \end{aligned}$$

Το φυσικό νόημα της παραπάνω ισότητας είναι ότι η πιθανότητα να έχουμε k ακόμη αποτυχίες, όταν είχαμε ήδη n αποτυχίες, είναι ανεξάρτητη του n, δηλαδή ξεχνάμε τις αποτυχίες του παρελθόντος και ξεκινάμε από την αρχή.

Άσκηση 6.

(α) Ο αριθμός των εβδομάδων που η επένδυση σας διπλασιάζεται είναι μια δυωνυμική τυχαία μεταβλητή Y με παραμέτρους (5,1/2). Αφού η επένδυση υποδιπλασιάζεται κατά τις υπόλοιπες 5 - Y εβδομάδες και κάθε υποδιπλασιασμός ακυρώνει έναν διπλασιασμό, έχουμε ότι $X = 32 * 2^Y * 2^{-(5-Y)} = 32 * 2^{2Y-5}$. Οι πιθανές τιμές της X είναι 1, 4, 16, 64, 256 και 1024 , που αντιστοιχούν στις $Y = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

(β) $P(X = 1) = P(Y = 0) = 1/32$
$P(X = 4) = P(Y = 1) = 5/32$
$P(X = 64) = P(Y = 3) = 10/32$
$P(X = 256) = P(Y = 4) = 5/32$
$P(X = 1024) = P(Y = 5) = 1/32$

(γ) $E[X] = \sum X * P(X) =$
$1 * (1/32) + 4 * (5/32) + 16 * (10/32) + 64 * (10/32) + 256 * (5/32) + 1024 * (1/32) = 97.65625$
Άρα η τηλεοπτική διαφήμιση υποτιμά κατά λίγο την απόδοση.

(δ) $P(X < 32) = P(X = 1) + P(X = 4) + P(X = 16) = 1/2$

(ε) Υπάρχει 50% πιθανότητα για κάποιον να χάσει τα λεφτά του με αυτήν την επένδυση. Εφόσον οι πιθανότητες απώλειας των χρημάτων είναι σημαντικές, αλλά και τα κέρδη που μπορεί να αποφέρει η επένδυση είναι υψηλά, εξαρτάται από το πόσο σημαντικό είναι για τον καθένα το αρχικό ποσό που θέλει να διαθέσει. Σε κάθε περίπτωση αν διαθέσει κάποιο μικρό αρχικό ποσό, η επένδυση θεωρείται αρκετά επικερδής με χαμηλό κόστος.

Άσκηση 7. Ρίχνουμε ταυτόχρονα δύο αμερόληπτα τρίεδρα ζάρια. Ορίζουμε την τ.μ. X ως το άθροισμα των δύο ρίψεων.

(α) Η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X είναι:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{9} & x = 2, \\ \frac{2}{9} & x = 3, \\ \frac{3}{9} & x = 4, \\ \frac{2}{9} & x = 5, \\ \frac{1}{9} & x = 6, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η μέση τιμή της τ.μ. X είναι:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x=1}^{6} x p_X(x) \\ &= 2\left(\frac{1}{9}\right) + 3\left(\frac{2}{9}\right) + 4\left(\frac{3}{9}\right) + 5\left(\frac{2}{9}\right) + 6\left(\frac{1}{9}\right) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Η διασπορά της τ.μ. X είναι:

$$\begin{aligned} var[X] &= \sum_{x=1}^{6} (x - E[X])^2 p_X(x) \\ &= \frac{1}{9}(2-4)^2 + \frac{2}{9}(3-4)^2 + \frac{3}{9}(4-4)^2 + \frac{2}{9}(5-4)^2 + \frac{1}{9}(6-4)^2 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(β) Θέτουμε $Z = X^2$ και έχουμε:

$$p_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{9} & z = 4, \\ \frac{2}{9} & z = 9, \\ \frac{3}{9} & z = 16, \\ \frac{2}{9} & z = 15, \\ \frac{1}{9} & z = 36, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Άσκηση 8.

(α) Πρέπει να έχουμε ότι $\sum_{x=-3}^{3} p_x(x) = 1$, οπότε

$$K = \frac{1}{\sum_{x=-3}^{3} x^2} = \frac{1}{28}$$

(β) Χρησιμοποιώντας την φόρμουλα $p_Y(y) = \sum_{\{x:\ |x|=y\}} p_X(x)$, παίρνουμε

$$p_Y(y) = \begin{cases} 2Ky^2 = \frac{y^2}{14}, & x = 1,\ 2,\ 3 \\ 0 & ,\text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(γ) Αν $y > 0$,

$$p_Y(y) = \sum_{\{x:\ |x|=y\}} p_X(x) = p_X(y) + p_X(-y)$$

Αν $y = 0$, τότε $p_Y(y) = p_X(y)$. Αλλιώς, $p_Y(y) = 0$.

(δ) Αρχίζοντας από τον ορισμό της μέσης τιμής της τ.μ. X έχουμε:

$$\begin{aligned} |E(X)| &= \left| \sum_{x \in \Omega} x p_X(x) \right| \\ &\le \sum_{x \in \Omega} |x p_X(x)| \\ &= \sum_{x \in \Omega} |x| p_X(x) \\ &= E(|X|) \end{aligned}$$

Πάντως, η παραπάνω περίπτωση είναι μια ειδική περίπτωση μιας πιο γενικής ανισότητας, η οποία είναι γνωστή ως ανισότητα του Jensen και δηλώνει ότι αν μια συνάρτηση $g(\cdot)$ είναι κυρτή, τότε

$$g(E(X)) \le E(g(X))$$

Άσκηση 9.

(α) Από την κοινή σ.π., υπάρχουν 6 ζευγάρια συντεταγμένων (x, y) με μη μηδενική πιθανότητα εμφάνισης. Αυτά τα ζευγάρια είναι τα: $(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (4,1)$ και $(4,3)$. Η πιθανότητα ενός ζευγαριού είναι ανάλογη του γινομένου των x και y συντεταγμένων του ζευγαριού. Επειδή η πιθανότητα ολόκληρου του δειγματικού χώρου πρέπει να είναι ίση με 1, θα πρέπει:

$$(1 \cdot 1)c + (1 \cdot 3)c + (2 \cdot 1)c + (2 \cdot 3)c + (4 \cdot 1)c + (4 \cdot 3)c = 1$$

Λύνοντας ως προς c παίρνουμε: $c = \boxed{\frac{1}{28}}$

(β) Υπάρχουν 3 δειγματικά σημεία για τα οποία $y < x$. Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$P(Y < X) = P(\{(2,1)\}) + P(\{(4,1)\}) + P(\{(4,3)\}) = \frac{2 \cdot 1}{28} + \frac{4 \cdot 1}{28} + \frac{4 \cdot 3}{28} = \boxed{\frac{18}{28}}$$

(γ) Υπάρχουν 2 δειγματικά σημεία για τα οποία $y > x$. Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$P(Y > X) = P(\{(1,3)\}) + P(\{(2,3)\}) = \frac{1 \cdot 3}{28} + \frac{2 \cdot 3}{28} = \boxed{\frac{9}{28}}$$

(δ) Υπάρχει 1 δειγματικό σημείο για το οποίο $y = x$. Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$P(Y = X) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1 \cdot 1}{28} = \boxed{\frac{1}{28}}$$

Παρατηρήστε ότι, χρησιμοποιώντας τα δύο παραπάνω μέρη της άσκησης, προκύπτει η αναμενόμενη ισότητα:

$$P(Y < X) + P(Y > X) + P(Y = X) = \frac{18}{28} + \frac{9}{28} + \frac{1}{28} = 1$$

(ε) Υπάρχουν 3 δειγματικά σημεία για τα οποία $y = 3$. Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με:

$$P(Y = 3) = P(\{(1,3)\}) + P(\{(2,3)\}) + P(\{(4,3)\}) = \frac{1 \cdot 3}{28} + \frac{2 \cdot 3}{28} + \frac{4 \cdot 3}{28} = \boxed{\frac{21}{28}}$$

(στ) Γενικά, για δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές X και Y για τις οποίες έχει οριστεί κοινή συνάρτηση πιθανότητας, έχουμε:

$$p_X(x) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y) \qquad \text{και} \qquad p_Y(y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y)$$

Σε αυτό το πρόβλημα, ο αριθμός των (X, Y) ζευγαριών είναι αρκετά μικρός, οπότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τις (οριακές) σ.π. με απαρίθμηση. Για παράδειγμα,

$$p_X(2) = P(\{(2,1)\}) + P(\{(2,3)\}) = \frac{8}{28}$$

Συνολικά, θα έχουμε:

$$p_X(x) = \begin{cases} 4/28 & , x = 1; \\ 8/28 & , x = 2; \\ 16/28 & , x = 4; \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 1/7 & , x = 1; \\ 2/27 & , x = 2; \\ 4/27 & , x = 4; \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$p_Y(y) = \begin{cases} 7/28 & , y = 1; \\ 21/28 & , y = 3; \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 1/4 & , y = 1; \\ 3/4 & , y = 3; \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(ζ) Γενικά, η αναμενόμενη τιμή οποιασδήποτε διακριτής τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$E[X] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x p_X(x)$$

Για αυτό το πρόβλημα, θα έχουμε:

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{7} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 4 \cdot \frac{4}{7} = \boxed{3}$$

και

$$E[Y] = 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{3}{4} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

(η) Η διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής X μπορεί να υπολογισθεί ως $E[X^2] - E[X]^2$ ή ως $E[(X - E[X])^2]$. Χρησιμοποιώντας τη δεύτερη μέθοδο προκύπτει ότι:

$$var(X) = (1-3)^2 \cdot \frac{1}{7} + (2-3)^2 \cdot \frac{2}{7} + (4-3)^2 \cdot \frac{4}{7} = \boxed{\frac{10}{7}}$$

και

$$var(Y) = (1 - \frac{5}{2})^2 \cdot \frac{1}{4} + (3 - \frac{5}{2})^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} + \frac{3}{16} = \boxed{\frac{3}{4}}$$