

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2004
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων:
Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Ημερομηνία Ανάθεσης: 01/11/2004

Ημερομηνία Παράδοσης: 15/11/2004

Άσκηση 1. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα n φορές και ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X ως τη διαφορά του αριθμού των γραμμάτων από τον αριθμό των κεφαλών που έρχονται.

- (α) Ποιο είναι το πεδίο τιμών της τ.μ. X ;
(β) Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) της τ.μ. X για την περίπτωση τριών ρίψεων, $n = 3$;

Άσκηση 2. Πριν αναχωρήσετε για το Las Vegas, ένας φίλος σας εισηγείται την ακόλουθη "σίγουρη" συνταγή για να κερδίσετε στη ρουλέτα: "Πόνταρε πρώτα \$1 στο κόκκινο. Αν έρθει κόκκινο (συμβαίνει με πιθανότητα 18/38), πάρε το κέρδος σου (\$1) και φύγε. Αν έρθει μαύρο και χάσεις (με πιθανότητα 20/38), βάλε από \$1 στο κόκκινο στα επόμενα δύο γυρίσματα του τροχού και μετά φύγε."

- (α) Ορίζουμε την τ.μ. X ως το συνολικό κέρδος σας. Προφανώς αρνητικές τιμές της X δηλώνουν χάσιμο. Δημιουργείστε το δενδρικό διάγραμμα για αυτό το πείραμα τύχης και περιγράψτε πλήρως την τ.μ. X (πεδίο τιμών και συνάρτηση πιθανότητας).
(β) Ποια η πιθανότητα να κερδίσετε, $P(X > 0)$;
(γ) Ποιο το αναμενόμενο κέρδος σας, $E[X]$; Είναι καλή η στρατηγική που σας προτείνει ο φίλος σας;

Άσκηση 3. Τα bits πληροφορίας 0 και 1 μεταδίδονται μέσω ενθόρυβου τηλεπικοινωνιακού καναλιού. Εξαιτίας του θορύβου, το bit λαμβάνεται λάθος με πιθανότητα 0.2. Για να βελτιώσουμε την αξιοπιστία του συστήματος, ο πομπός στέλνει την ακολουθία 00000 όταν θέλουμε να μεταδώσουμε το 0 και την ακολουθία 11111 όταν θέλουμε να μεταδώσουμε το 1. Αν ο δέκτης χρησιμοποιεί "majority decoding" για να αποφασίσει ως προς το bit πληροφορίας που μεταδόθηκε, ποια η πιθανότητα λάθος απόφασης;

Κατά το "majority decoding" ο δέκτης αποφασίζει κατά πλειοψηφία, δηλαδή αποφασίζει 0 (ή 1) αν τουλάχιστον 3 από τα 5 ψηφία της ληφθείσης ακολουθίας είναι 0 (ή 1). Διατυπώστε σαφώς τις υποθέσεις ανεξαρτησίας που κάνετε για να λύσετε το πρόβλημα. Χρησιμοποιείτε διωνυμικές πιθανότητες.

Άσκηση 4. Ένα δορυφορικό σύστημα αποτελείται από n εξαρτήματα και λειτουργεί καλά εάν τουλάχιστον k από τα εξαρτήματα του λειτουργούν. Όταν η μέρα είναι βροχερή, κάθε εξάρτημα λειτουργεί καλά με πιθανότητα p_1 , ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Όταν η μέρα είναι ηλιόλουστη, κάθε εξάρτημα λειτουργεί καλά με πιθανότητα p_2 , επίσης ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα. Αν η πιθανότητα βροχόπτωσης αύριο είναι p_r , ποια είναι η πιθανότητα ότι θα λειτουργεί το δορυφορικό σύστημα;

Άσκηση 5. Αν X είναι μία γεωμετρική τ.μ., δείξτε ότι

$$P(X = n + k / X > n) = P(X = k).$$

Με μία πρόταση εξηγήστε το φυσικό νόημα αυτής της ισότητας.

Άσκηση 6. Το διαφημιστικό φυλλάδιο της GoDotCom Inc., μιας εταιρείας διαχείρισης κεφαλαίων υποστηρίζει ότι μπορεί να διπλασιάσει την επένδυση των πελατών της σε μία εβδομάδα μέσω εμπορίας μετοχών νέας τεχνολογίας. Οι διαφημίσεις της στην τηλεόραση διακηρύσσουν ότι "κατά μέσο όρο οι πελάτες μας τριπλασιάζουν τα λεφτά τους σε 5 εβδομάδες!" Αποφασίζετε να επενδύσετε 32 ευρώ μέσω της GoDotCom Inc. για μία περίοδο 5 εβδομάδων. Έστω X η αξία της επένδυσής σας στο τέλος αυτής της περιόδου.

Τώρα, υποθέτουμε ότι η GoDotCom Inc. σε μία εβδομάδα διπλασιάζει την επένδυσή σας με πιθανότητα $1/2$ και χάνει το 50% της επένδυσής σας με πιθανότητα $1/2$. Δηλαδή, αν επενδύσετε C ευρώ, τότε μία εβδομάδα μετά θα έχετε είτε $2C$ είτε $C/2$ ευρώ με την ίδια πιθανότητα. Υποθέτουμε ακόμα ότι η απόδοση κάθε εβδομάδας αποτελεί μία ανεξάρτητη δοκιμή η οποία είτε διπλασιάζει είτε μειώνει στο μισό την επένδυση που είχατε στην αρχή της εβδομάδας.

- (α) Ποιο το πεδίο τιμών της τ.μ. X ;
- (β) Ποια η σ.π. της τ.μ. X ;
- (γ) Ποια η μέση τιμή της τ.μ. X ; Είναι η διαφήμιση της GoDotCom Inc. ακριβής;
- (δ) Ποια η πιθανότητα ότι θα χάσετε λεφτά επενδύοντας με την GoDotCom Inc.; Δηλαδή βρείτε την $P(X < 32)$.
- (ε) Μία επένδυση 32.000 ευρώ με την GoDotCom Inc. μπορεί να αξίζει 1.000 ευρώ σε 5 εβδομάδες! Έστω ότι είχατε αυτά τα χρήματα. Θα αποφασίζατε να τα επενδύσετε με την GoDotCom Inc.; Γιατί ναι ή γιατί όχι;

Άσκηση 7. Ρίχνουμε ταυτόχρονα δύο αμερόληπτα τριέδρα ζάρια. Ορίζουμε την τ.μ. X ως το άθροισμα των δύο ρίψεων.

- (α) Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας, η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ. X ;
- (β) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της τ.μ. X^2 .

Άσκηση 8. Έστω X μία διακριτή τ.μ. και έστω $Y = X^2$.

- (α) Η συνάρτηση πιθανότητας της X είναι η

$$p_X(x) = \begin{cases} Kx^2 & \text{αν } x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου K κατάλληλη σταθερά. Υπολογίστε την K .

- (β) Για τη σ.π. της X που δίνεται στο (α), υπολογίστε τη σ.π. της Y .
- (γ) Βρείτε τη γενική σχέση που συνδέει τις σ.π. των X και Y .
- (δ) Δείξτε ότι $|E[X]| \leq E[|X|]$.

Άσκηση 9. Οι τ.μ. X και Y έχουν την από κοινού σ.π.

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy & \text{αν } x \in \{1, 2, 4\} \text{ και } y \in \{1, 2\} \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

- (α) Ποια είναι η τιμή της σταθεράς c ;
- (β) Ποια είναι η $P(Y < X)$;
- (γ) Ποια είναι η $P(Y > X)$;
- (δ) Ποια είναι η $P(Y = X)$;
- (ε) Ποια είναι η $P(Y = 3)$;
- (στ) Βρείτε τις περιθωριακές σ.π. των X και Y .
- (ζ) Βρείτε τις μέσες τιμές των X και Y .
- (η) Βρείτε τις διασπορές των X και Y .