ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2004
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 20/10/2004 Ημερομηνία Παράδοσης: 27/10/2004

Άσκηση 1.

(α) Το άτομο είτε δεν θα καλέσει κανένα από τους δύο, διαλέγοντας 5 άτομα από τα 6, είτε θα διαλέξει έναν από τους δύο και 4 άτομα από τα 6. Οπότε οι ζητούμενες επιλογές είναι:

$$\binom{6}{5} + \binom{2}{1}\binom{6}{4}$$

(β) Το άτομο είτε δεν θα καλέσει κανένα από τους δύο, διαλέγοντας 5 άτομα από τα 6, είτε θα καλέσει και τα δύο άτομα καλώντας επίσης 3 άτομα από τα 6. Οπότε οι ζητούμενες επιλογές είναι:

$$\binom{6}{5} + \binom{6}{3}$$

Άσκηση 2. Οι δυνατές τοποθετήσεις ισούνται με $2 \cdot 9! - 2^2 \cdot 8!$ Και αυτό γιατί $2 \cdot 9!$ είναι ο αριθμός των τοποθετήσεων κατά τις οποίες μόνο οι Γάλλοι και οι Άγγλοι κάθονται δίπλα, ενώ $2^2 \cdot 8!$ είναι ο αριθμός των τοποθετήσεων κατά τις οποίες κάθονται δίπλα τόσο οι Γάλλοι με τους Άγγλους όσο και οι Αμερικάνοι με τους Κουβανούς.

Άσκηση 3.

(α) Οι δυνατές επιλογές ισούνται με το συνδυασμό των $3n$ ανά 3 δηλαδή

$$\binom{3n}{3}$$

(β) Θα πρέπει να διαλέξουμε μια από τις τρεις τάξεις και τρεις από τους n μαθητές που θα βρίσκονται στην επιλεγμένη τάξη. Οπότε οι δυνατές επιλογές θα ισούνται με

$$\binom{3}{1}\binom{n}{3} = 3\binom{n}{3}$$

(γ) Θα πρέπει να διαλέξουμε μια από τις τρεις τάξεις και δύο από τους n μαθητές αυτής της τάξης. Έπειτα, θα πρέπει να διαλέξουμε μια από τις εναπομείναντες δύο τάξεις και έναν από τους n μαθητές της. Οπότε οι δυνατές επιλογές θα ισούνται με

$$\binom{3}{1}\binom{n}{2}\binom{2}{1}\binom{n}{1} = 3 \cdot \frac{n\,(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot n = 3n^2\,(n-1)$$

(δ) Από κάθε τάξη διαλέγουμε έναν από τους n μαθητές. Οπότε οι δυνατές επιλογές θα ισούνται με

$$\binom{n}{1}\binom{n}{1}\binom{n}{1} = n \cdot n \cdot n = n^3$$

(ε) Επειδή οι επιλογές να διαλέξουμε τρεις από τους $3n$ μαθητές ισούνται με τις επιλογές να διαλέξουμε είτε τρεις μαθητές από την ίδια τάξη είτε δύο μαθητές από την ίδια τάξη και ένα από μια άλλη είτε ένα μαθητή από κάθε τάξη, θα έχουμε

$$\binom{3n}{3} = 3\binom{n}{3} + 3n^2\,(n-1) + n^3$$

Άσκηση 4. Αρχικά, ας προσδιορίσουμε τον αριθμό των διαφορετικών αποτελεσμάτων κατά τα οποία k φοιτητές περνάνε το μάθημα. Επειδή υπάρχουν $\binom{n}{k}$ διαφορετικοί πίνακες μεγέθους k και $k!$ πιθανές ταξινομήσεις βαθμών ανά πίνακα, έπεται ότι θα υπάρχουν $\binom{n}{k}k!$ δυνατοί πίνακες k μαθητών που έχουν περάσει το μάθημα. Συνεπώς, θα υπάρχουν συνολικά $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k!$ δυνατοί πίνακες.

Άσκηση 5. Υπάρχουν $n!$ τρόποι να κατανέμουμε n καπέλα σε n διαφορετικούς ανθρώπους. Εφόσον $n-2$ άνθρωποι διάλεξαν το δικό τους καπέλο, υπήρχαν μόνο δύο καπέλα που κατανεμήθηκαν ελεύθερα. Όμως, επειδή $n-2$ άνθρωποι διάλεξαν τα καπέλα τους σωστά, τα τελευταία δύο καπέλα δεν βρήκαν τον σωστό κάτοχο. Οι τρόποι δύο άνθρωποι να μην διαλέξουν το σωστό καπέλο ισούνται με $\binom{n}{2}$. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$\frac{\binom{n}{2}}{n!}$$

Άσκηση 6. Εφόσον έχουμε 4 συγκεκριμένα χαρτιά που πρέπει να είναι ανάμεσα στα 8 που διαλέγει ο Παύλος, ο Παύλος μπορεί να διαλέξει μόνο 4 επιπλέον χαρτιά από τα 48 εναπομείναντα. Οπότε, ο συνολικός αριθμός επιλογών του Παύλου, στις οποίες περικλείονται τα 4 χαρτιά της Αλίκης, είναι $\binom{4}{4}\binom{48}{4}$. Ο συνολικός αριθμός των τρόπων που ο Παύλος μπορεί να διαλέξει τυχαία 8 χαρτιά είναι $\binom{52}{8}$. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\frac{\binom{4}{4}\binom{48}{4}}{\binom{52}{8}}$$

Άσκηση 7. Υπάρχουν n διαδοχικές ρίψεις του νομίσματος.

(α) Δεδομένου ότι ήρθε κεφαλή ακριβώς μια φορά, αυτή η κεφαλή μπορεί να ήρθε σε οποιοδήποτε από τις n ρίψεις. Επομένως, η πιθανότητα ότι στην πρώτη ρίψη του νομίσματος ήρθε κεφαλή είναι

$$\frac{1}{n}$$

(β) Δεδομένου ότι ήρθαν ακριβώς δύο κεφαλές και ότι στην πρώτη ρίψη είχαμε σίγουρα κεφαλή, τότε υπάρχουν $n-1$ ρίψεις στις οποίες μπορεί να ήρθε η δεύτερη κεφαλή. Ο συνολικός αριθμός των τρόπων για να πάρουμε δύο κεφαλές είναι $\binom{n}{2}$. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\frac{n-1}{\binom{n}{2}}$$

(γ) Δεδομένου ότι ήρθαν ακριβώς 7 κεφαλές, η πιθανότητα να πάρουμε τρεις κεφαλές στις τέσσερις πρώτες ρίψεις αποτελείται από τρία μέρη.

1. Ο αριθμός των τρόπων να πάρουμε 3 κεφαλές στις 4 πρώτες ρίψεις είναι $\binom{4}{3}$
2. Ο αριθμός των τρόπων να πάρουμε 4 κεφαλές στις εναπομείναντες $n-4$ ρίψεις είναι $\binom{n-4}{4}$
3. Ο αριθμός των τρόπων να πάρουμε 7 κεφαλές στις n ρίψεις είναι $\binom{n}{7}$

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\frac{\binom{4}{3}\binom{n-4}{4}}{\binom{n}{7}}$$