ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2004
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 11/10/2004 Ημερομηνία Παράδοσης: 18/10/2004

Άσκηση 1. Ξέρουμε ότι:

$$P\left(A_1 \cup \cdots \cup A_n\right) = 1 - P\left(\left(A_1 \cup \cdots \cup A_n\right)^c\right) \tag{1}$$

Από τον νόμο του De Morgan έχουμε ότι:

$$\left(A_1 \cup \cdots \cup A_n\right)^c = A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c \tag{2}$$

Επίσης, από τον ορισμό της ανεξαρτησίας έχουμε:

$$P\left(A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(A_i^c\right) \tag{3}$$

Ακόμη, ξέρουμε ότι για κάθε i ισχύει:

$$P\left(A_i^c\right) = 1 - P\left(A_i\right) \tag{4}$$

Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις $(2), (3)$ και (4) η εξίσωση (1) παίρνει την τελική μορφή:

$$P\left(A_1 \cup \cdots \cup A_n\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - P\left(A_i\right)\right) \tag{5}$$

Άσκηση 2. Θα δείξουμε ότι $P\left(A \cap (B \cup C)\right) = P\left(A\right) P\left(B \cup C\right)$, το οποίο συνεπάγεται την ανεξαρτησία των A και $B \cup C$.

Αρχικά σημειώστε ότι $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

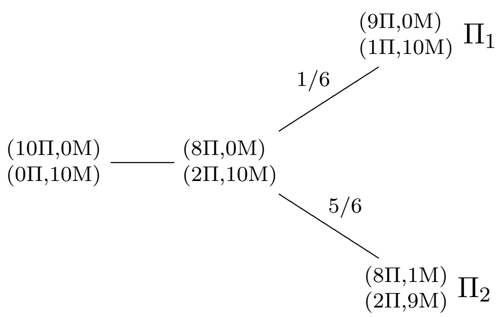
Οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
P\left(A \cap (B \cup C)\right) &= P\left((A \cap B) \cup (A \cap C)\right) \\
&= P\left(A \cap B\right) + P\left(A \cap C\right) - P\left(A \cap B \cap C\right) \\
&= P\left(A\right) P\left(B\right) + P\left(A\right) P\left(C\right) - P\left(A\right) P\left(B\right) P\left(C\right) \\
&= P\left(A\right) \left(P\left(B\right) + P\left(C\right) - P\left(B\right) P\left(C\right)\right) \\
&= P\left(A\right) \left(P\left(B\right) + P\left(C\right) - P\left(B \cap C\right)\right) \\
&= P\left(A\right) P\left(B \cup C\right)
\end{aligned}$$

Άσκηση 3. Αρχικά, 10 πηρούνια και κανένα μαχαίρι βρίσκονται στο αριστερό συρτάρι, γεγονός το οποίο δηλώνουμε με $(10\Pi, 0\mathrm{M})$. Παρομοίως, η κατάσταση του δεξιού συρταριού είναι $(0\Pi, 10\mathrm{M})$. Όταν ο συγκάτοικος πάρει τα δύο πηρούνια από το αριστερό συρτάρι και τα τοποθετήσει στο δεξί, οι καταστάσεις των δύο συρταριών γίνονται $(8\Pi, 0\mathrm{M})$ και $(2\Pi, 10\mathrm{M})$ αντίστοιχα. Από το δεξί συρτάρι, η πιθανότητα να τραβήξεις ένα πηρούνι είναι $2/12 = 1/6$ και η πιθανότητα να τραβήξεις ένα μαχαίρι είναι $5/6$.

Επομένως, από τον αρχική διάταξη, το σύστημα μπορεί να έχει εξελιχθεί με δύο πιθανούς τρόπους (όπως φαίνεται και από το σχήμα 1). Ονομάζουμε αυτές τις περιπτώσεις Π_1 και Π_2. Η περίπτωση Π_1 αναφέρεται στο γεγονός ένα πηρούνι να μεταφέρθηκε από το δεξί συρτάρι στο αριστερό, αφήνοντας τις καταστάσεις των δύο συρταριών ως $(9\Pi, 0\mathrm{M})$ και $(1\Pi, 10\mathrm{M})$. Αντίθετα, η περίπτωση Π_2 αναφέρεται στην μεταφορά ενός μαχαιριού από το δεξί συρτάρι στο αριστερό, έχοντας σαν αποτέλεσμα τις καταστάσεις $(8\Pi, 1\mathrm{M})$ και $(2\Pi, 9\mathrm{M})$.

Από το παραπάνω επιχείρημα έχουμε ότι: $P(\Pi_1) = 1/6$ και $P(\Pi_2) = 5/6$.



Σχήμα 1: Δενδρικό διάγραμμα για την άσκηση 3

Από το κανόνα του Bayes έχουμε ότι:

$$P(\text{left chosen} \mid \text{knife pulled}) = \frac{P(\text{knife pulled} \mid \text{left chosen})\, P(\text{left chosen})}{P(\text{knife pulled})}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας (Total Probability Theorem) έχουμε:

$$\begin{aligned} P(\text{knife pulled} \mid \text{left chosen}) &= P(\text{knife pulled} \mid \Pi_1, \text{left chosen})\, P(\Pi_1) + \\ &\quad + P(\text{knife pulled} \mid \Pi_2, \text{left chosen})\, P(\Pi_2) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{54} \end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned} P(\text{knife pulled} \mid \text{right chosen}) &= P(\text{knife pulled} \mid \Pi_1, \text{right chosen})\, P(\Pi_1) + \\ &\quad + P(\text{knife pulled} \mid \Pi_2, \text{right chosen})\, P(\Pi_2) \\ &= \frac{10}{11} \cdot \frac{1}{6} + \frac{9}{11} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Bayes έχουμε:

$$\begin{aligned}
P(\text{left} \mid \text{knife}) &= \frac{P(\text{knife} \mid \text{left})\,P(\text{left})}{P(\text{knife})} \\
&= \frac{P(\text{knife} \mid \text{left})\,P(\text{left})}{P(\text{knife} \mid \text{left})\,P(\text{left}) + P(\text{knife} \mid \text{right})\,P(\text{right})} \\
&= \frac{5/54 \cdot 1/2}{5/45 \cdot 1/2 + 5/6 \cdot 1/2} \\
&= \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

Άσκηση 4. Έστω C το γεγονός ότι ο μαθητής απαντάει την ερώτηση σωστά και K το γεγονός ότι ο μαθητής πράγματι ξέρει την απάντηση. Τώρα θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
P(K|C) &= \frac{P(KC)}{P(C)} \\
&= \frac{P(C|K)\,P(K)}{P(C|K)\,P(K) + P(C|K^c)\,P(K^c)} \\
&= \frac{p}{p + (1/m)(1-p)} \\
&= \frac{mp}{1 + (m-1)\,p}
\end{aligned}$$

Η παραπάνω πιθανότητα για $m = 4$ και $p = 1/2$ θα ισούται με:

$$\begin{aligned}
P(K|C) &= \frac{mp}{1 + (m-1)\,p} \\
&= \frac{5 \cdot 1/2}{1 + (5-1) \cdot 1/2} \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

Άσκηση 5. Έστω R το γεγονός ότι ο φοιτητής θα πάρει τη θέση.

(α)

$$\begin{aligned}
P(R) &= P(R \mid \text{ισχυρή})\,P(\text{ισχυρή}) + P(R \mid \text{καλή})\,P(\text{καλή}) + P(R \mid \text{κακή})\,P(\text{κακή}) \\
&= (0.8)(0.7) + (0.4)(0.2) + (0.1)(0.1) = 0.65
\end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned}
P(\text{ισχυρή} \mid R) &= \frac{P(R \mid \text{ισχυρή})\,P(\text{ισχυρή})}{P(R)} \\
&= \frac{(0.8)(0.7)}{(0.65)} = \frac{56}{65}
\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$P(\text{καλή} \mid R) = \frac{8}{65},\ P(\text{κακή} \mid R) = \frac{1}{65}$$

(γ)

$$\begin{aligned} P\left(\text{ισχυρή} \mid R^c\right) &= \frac{P\left(R^c \mid \text{ισχυρή}\right) P\left(\text{ισχυρή}\right)}{P\left(R^c\right)} \\ &= \frac{(0.2)\,(0.7)}{(0.35)} = \frac{14}{35} \end{aligned}$$

Ομοίως,

$$P\left(\text{καλή} \mid R^c\right) = \frac{12}{35},\ P\left(\text{κακή} \mid R^c\right) = \frac{9}{35}$$

Άσκηση 6. Έστω C_i το γεγογός ότι το i-στό νόμισμα διαλέγεται αρχικά, $i = 0, 1, \ldots, k$. Επίσης, έστω F_n το γεγονός όλες οι πρώτες n ρίψεις καταλήγουν σε κεφαλή και H το γεγονός ότι η $(n+1)$-στή ρίψη έφερε κεφαλή. Η επιθυμητή πιθανότητα, $P\left(H \mid F_n\right)$, μπορεί να αποκτηθεί ως εξής:

$$P\left(H \mid F_n\right) = \sum_{i=0}^{k} P\left(H \mid F_n C_i\right) P\left(C_i \mid F_n\right)$$

Τώρα, δεδομένου ότι το i-στό νόμισμα επιλέγεται, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι τα αποτελέσματα θα είναι υποθετικά ανεξάρτητα, όπου κάθε ένα από αυτά καταλήγει σε κεφαλή με πιθανότητα i/k. Συνεπώς,

$$P\left(H \mid F_n C_i\right) = P\left(H \mid C_i\right) = \frac{i}{k}$$

Επίσης, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P\left(C_i \mid F_n\right) &= \frac{P\left(C_i F_n\right)}{P\left(F_n\right)} \\ &= \frac{P\left(F_n \mid C_i\right) P\left(C_i\right)}{\sum\limits_{j=0}^{k} P\left(F_n \mid C_j\right) P\left(C_j\right)} \\ &= \frac{(i/k)^n\left[1/(k+1)\right]}{\sum\limits_{j=0}^{k} (j/k)^n\left[1/(k+1)\right]} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$P\left(H \mid F_n\right) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{k} (i/k)^{n+1}}{\sum\limits_{j=0}^{k} (j/k)^n} \tag{6}$$

Αλλά αν το k είναι μεγάλο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω προσεγγίσεις ολοκληρωμάτων:

$$\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{i}{k}\right)^{n+1} \approx \int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{1}{n+2} \tag{7}$$

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{j}{k}\right)^{n} \approx \int_0^1 x^{n}dx = \frac{1}{n+1} \tag{8}$$

Συνεπώς, για k μεγάλο, η (6) με την βοήθεια των (7) και (8) θα γίνει:

$$P(H \mid F_n) \approx \frac{n+1}{n+2}$$

Άσκηση 7. Μας δίνεται ότι

$$P(AB) = P(B) \tag{9}$$

και πρέπει να δείξουμε ότι αυτό συνεπάγεται ότι

$$P(B^c A^c) = P(A^c)$$

Ένας τρόπος είναι ο ακόλουθος:

$$\begin{aligned} P(B^c A^c) &= P((A \cup B)^c) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \\ &\overset{(9)}{=} 1 - P(A) \\ &= P(A^c) \end{aligned}$$

Άσκηση 8.

(α) Απαραίτητα ψευδής διότι αν είναι ξένα, τότε

$$0 = P(AB) \neq P(A)P(B)$$

(β) Απαραίτητα ψευδής διότι αν είναι ανεξάρτητα, τότε

$$P(AB) = P(A)P(B) > 0$$

(γ) Απαραίτητα ψευδής διότι αν είναι ξένα, τότε

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1.2$$

(δ) Υπό συνθήκη αληθής διότι από την ισότητα $P(A) = P(B) = 0.6$ δεν μπορούμε να δείξουμε ότι τα A και B είναι ανεξάρτητα. Αν όμως μας δινόταν και ότι $P(AB) = 0.36$ τότε σίγουρα τα A και B θα ήταν ανεξάρτητα.