ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2004
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων:
Δεσμευμένη πιθανότητα, κανόνας του Bayes, ανεξαρτησία

Ημερομηνία Ανάθεσης: 11/10/2004 Ημερομηνία Παράδοσης: 18/10/2004

Άσκηση 1. Έστω $A_1, A_2 \ldots, A_n$ ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Δείξτε ότι $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1-\prod_{i=1}^{n}(1-P(A_i))$. Χρησιμοποιείστε την ιδιότητα ότι αν τα ενδεχόμενα $A_1, A_2 \ldots, A_n$ είναι ανεξάρτητα, το ίδιο ισχύει και για τα ενδεχόμενα $A_1^c, A_2^c \ldots, A_n^c$.

Άσκηση 2. 'Εστω A, B και C τρία ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Δείξτε ότι τα ενδεχόμενα A και $B \cup C$ είναι επίσης ανεξάρτητα.

Άσκηση 3. Στην κουζίνα του σπιτιού σας, βάζετε και τα 10 πιρούνια σας στο αριστερό συρτάρι ενώ τοποθετείτε και τα 10 μαχαίρια σας στο δεξί. Ο συγκάτοικός σας (που δεν συμφωνεί με την απόλυτη τάξη που προσπαθείτε να του επιβάλλετε) έρχεται, παίρνει δύο πιρούνια από το αριστερό συρτάρι και τα ρίχνει στο δεξί. Κατόπιν, παίρνει στην τύχη ένα κομμάτι (πιρούνι ή μαχαίρι) από το δεξί συρτάρι και το ρίχνει στο αριστερό.

Μετά από αυτή την πράξη εξέγερσης του συγκάτοικου σας, έρχεστε και επιλέγετε στην τύχη ένα κομμάτι από ένα τυχαίο συρτάρι. Δεδομένου ότι κρατάτε στο χέρι σας ένα μαχαίρι, ποια η πιθανότητα ότι ανοίξατε το αριστερό συρτάρι;

Βοήθεια: Αρχικά κωδικοποιείστε τις καταστάσεις στα δύο συρτάρια ως εξής. Για το αριστερό: (10Π,0Μ), ενώ για το δεξί: (0Π,10Μ). Από αυτή την αρχική διάταξη (ρίζα του δένδρου), σχηματίστε το δένδρο για το πρόβλημα. Αφού το κάνετε, η λύση βασίζεται σε απλές εφαρμογές του θεωρήματος ολικής πιθανότητας και του κανόνα του Bayes.

Άσκηση 4. Σε μία γραπτή εξέταση επιλογής ορθών απαντήσεων (multiple-choice test), ο φοιτητής είτε γνωρίζει την απάντηση είτε μαντεύει. Έστω p η πιθανότητα ότι ο φοιτητής γνωρίζει την απάντηση και $1-p$ η πιθανότητα ότι ο φοιτητής μαντεύει. Υποθέτουμε ότι όταν ο φοιτητής μαντεύει, επιλέγει τη σωστή απάντηση με πιθανότητα $1/m$, όπου m είναι ο αριθμός των επιλογών για κάθε ερώτηση. Ποια η δεσμευμένη πιθανότητα ότι ο φοιτητής γνώριζε την απάντηση σε μία ερώτηση, δεδομένου ότι απάντησε σωστά; Υπολογίστε την πιθανότητα όταν $m = 5$ και $p = 1/2$.

Άσκηση 5. Ένας φοιτητής κάνει αίτηση για μία θέση εργασίας και ζητά συστατική επιστολή από κάποιον καθηγητή του. Εκτιμά ότι έχει 80% πιθανότητα να πάρει τη θέση αν η συστατική είναι πολύ ισχυρή, 40% αν η συστατική είναι καλή και 10% αν η συστατική δεν είναι καλή. Επίσης, εκτιμά ότι οι πιθανότητες να λάβει πολύ ισχυρή, καλή, ή κακή συστατική είναι 0.7, 0.2 και 0.1, αντίστοιχα.

(α) Πόσο σίγουρος πρέπει να είναι ότι θα πάρει τη θέση;
(β) Δεδομένου ότι παίρνει τη θέση, πόσο σίγουρος πρέπει να αισθάνεται ότι έλαβε ισχυρή συστατική, (ή καλή, ή κακή);
(γ) Δεδομένου ότι δεν παίρνει τη θέση, πόσο σίγουρος πρέπει να αισθάνεται ότι έλαβε ισχυρή συστατική, (ή καλή, ή κακή);

Άσκηση 6. Κανόνας αλληλουχίας του Laplace. Σε ένα δοχείο υπάρχουν $k+1$ νομίσματα. Όταν ρίξουμε το i-στό νόμισμα, έρχεται κεφαλή με πιθανότητα i/k, $i = 0, 1, \ldots, k$. Επιλέγουμε στην τύχη ένα νόμισμα από το δοχείο και αρχίζουμε να το ρίχνουμε. Αν οι πρώτες n ρίψεις φέρουν όλες κεφαλή, ποια η δεσμευμένη πιθανότητα ότι και η $(n+1)$-στή ρίψη θα φέρει κεφαλή;

Βοήθεια: Χρησιμοποιείστε τα εξής ενδεχόμενα: C_i είναι το ενδεχόμενο ότι επιλέγεται το i-στό νόμισμα, $i = 0, 1, \ldots, k$, F_n είναι το ενδεχόμενο ότι οι πρώτες n ρίψεις έφεραν κεφαλή και H είναι το ενδεχόμενο ότι η $(n+1)$-στή ρίψη έφερε κεφαλή. Για να βρείτε τη ζητούμενη πιθανότητα $P(H/F_n)$, παρατηρείστε ότι τα γεγονότα H και F_n είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα δεδομένου του C_i. Επίσης, $\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k}(\frac{i}{k})^n \approx \frac{1}{n+1}$.

Άσκηση 7. Δείξτε ότι αν $P(A/B) = 1$, τότε και $P(B^c/A^c) = 1$.

Άσκηση 8. Έστω A και B δύο ενδεχόμενα με μη μηδενικές πιθανότητες. Δείξτε για κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις αν είναι (i) απαραίτητα αληθής (ii) απαραίτητα ψευδής (iii) υπό συνθήκη αληθής.

(α) Αν τα A και B είναι ξένα, τότε είναι και ανεξάρτητα.
(β) Αν τα A και B είναι ανεξάρτητα, τότε είναι και ξένα.
(γ) $P(A) = P(B) = 0.6$ και τα A και B είναι ξένα.
(δ) $P(A) = P(B) = 0.6$ και τα A και B είναι ανεξάρτητα.