ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2004
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 29/09/2004 Ημερομηνία Παράδοσης: 06/10/2004

Άσκηση 1. Έστω $A_i \in F,\ i \in I$. Τότε $A_i^c \in F$ (Ιδιότητα 2)
Από τους νόμους De Morgan:

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \left(\bigcup_{i\in I} A_i^c\right)^c$$

Αλλά $A_i^c \in F,\ i \in I$ οπότε διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} & \bigcup_{i\in I} A_i^c \in F \ \text{(Ιδιότητα 3)} \\ \Rightarrow\ & \left(\bigcup_{i\in I} A_i^c\right) \in F \ \text{(Ιδιότητα 2)} \\ \Rightarrow\ & \bigcap_{i\in I} A_i \in F \end{aligned}$$

Άσκηση 2. Έχουμε τα ακόλουθα:
$A = \{1, 0001, 0000001, ...\}$
$B = \{01, 00001, 00000001, ...\}$
$(A \cup B)^c = \{00000..., 001, 000001, ...\}$

Άσκηση 3. Ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned} \text{E} &= \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(3,6),(4,1),(4,3),(4,5), \\ &\quad (5,2),(5,4),(5,6),(6,1),(6,3),(6,5)\} \\ \text{F} &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\} \\ \text{G} &= \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} \end{aligned}$$

Οπότε θα έχουμε:

$$\text{EF} = \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(4,1),(6,1)\}$$

$E \cup F$ συμβαίνει όταν το άθροισμα είναι περιττό ή όταν ένα τουλάχιστον από τα ζάρια προσγειωθεί στον άσσο.
$FG = \{(1,4),(4,1)\}$
EF^c είναι το γεγονός κατά το οποίο κανένα από τα ζάρια δεν προσγειώνεται στον άσσο, ενώ το άθροισμα είναι περιττό.
$EFG = FG$

Άσκηση 4. Έχουμε τα εξής:
(α) $S = \{(1,g), (0,g), (1,f), (0,f), (1,s), (0,s)\}$
(β) $\mathrm{A} = \{(1,s), (0,s)\}$
(γ) $B = \{(0,g), (0,f), (0,s)\}$
(δ) $B^c \cup A = \{(1,s), (0,s), (1,g), (1,f)\}$

Άσκηση 5.
Για $k = 2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} 1 \geq P(E_1 \cup E_2) &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 E_2) \\ &\Rightarrow P(E_1 E_2) \geq P(E_1) + P(E_2) - 1 \end{aligned}$$

Έστω ότι ισχύει για $k = n - 1$ δηλαδή ότι:

$$P(E_1 \ldots E_{n-1}) \geq P(E_1) + \cdots + P(E_{n-1}) - (n-2) \quad (1)$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $k = n$ δηλαδή ότι:

$$P(E_1 \ldots E_n) \geq P(E_1) + \cdots + P(E_n) - (n-1)$$

Από την ανίσωση του Bonferonni έχουμε ότι:

$$P(E_1 \ldots E_n) \geq P(E_1 \ldots E_{n-1}) + P(E_n) - 1 \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} P(E_1 \ldots E_n) &\geq P(E_1) + \cdots + P(E_{n-1}) - (n-2) + P(E_n)) - 1 \\ &= P(E_1) + \cdots + P(E_n) - (n-1) \end{aligned}$$

Άσκηση 6. Διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} P(M \cup W \cup G) &= P((M \cup W) \cup G) \\ &= P(M \cup W) + P(G) - P((M \cup W) \cap G) \\ &= P(M) + P(W) - P(MW) + P(G) - P((MG) \cup (WG)) \\ &= P(M) + P(W) - P(MW) + P(G) - P(MG) - P(WG) + P(MGW) \\ &= \frac{312 + 470 + 525 + 25 - (147 + 42 + 86)}{1000} \\ &= \frac{1057}{1000} > 1 \end{aligned}$$

Άσκηση 7. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(EF^c \cup E^cF) &= P(EF^c) + P(E^cF) \\ &= P(E) - P(EF) + P(F) - P(EF) \end{aligned}$$

Άσκηση 8. Έστω D το γεγονός ότι η ελάχιστη θερμοκρασία είναι 70 βαθμοί. Τότε

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.7 - P(AB)$
$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(CD) = 0.2 + P(D) - P(DC)$

Αφαιρώντας μια από τις παραπάνω εξισώσεις από την άλλη και λαμβάνοντας υπόψη ότι
$A \cup B = C \cup D$ και $AB = CD$
έχουμε

$$0 = 0.5 - P(D)$$

δηλαδή

$$P(D) = 0.5$$