

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2004
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 29/09/2004

Ημερομηνία Παράδοσης: 06/10/2004

Άσκηση 1. Όπως είδαμε στην τάξη, μία σ-άλγεβρα είναι κλειστή ως προς την συνολοθεωρητική πράξη της ένωσης. Χρησιμοποιώντας τους νόμους του De Morgan, αποδείξτε ότι μία σ-άλγεβρα είναι κλειστή και ως προς την συνολοθεωρητική πράξη της τομής, δηλαδή αν $\{A_i, i \in I\}$ είναι μία συλλογή συνόλων της σ-άλγεβρας F , τότε $\bigcap_{i \in I} A_i \in F$.

Άσκηση 2. Οι A , B , και C ρίχνουν με αυτή τη σειρά ένα κέρμα. Ο πρώτος που θα φέρει κορώνα κερδίζει (οπότε και το παιχνίδι τελειώνει). Δώστε μία περιγραφή του δειγματικού χώρου Ω για αυτό το πείραμα τύχης. Με βάση την περιγραφή σας, ορίστε τα ακόλουθα ενδεχόμενα στον Ω :

(α) $A = \{\text{κερδίζει ο } A\}$

(β) $B = \{\text{κερδίζει ο } B\}$

(γ) $(A \cup B)^c$

Άσκηση 3. Ρίχνουμε 2 ζάρια. Έστω E το γεγονός ότι το άθροισμα των ζαριών είναι περιττό, F το γεγονός τουλάχιστον ένα από τα δύο να έρθει άσσος και G το γεγονός το άθροισμα να είναι 5. Περιγράψτε τα γεγονότα EF , $E \cup F$, FG , EF^c και $EF \cap G$.

Άσκηση 4. Ένα νοσοκομείο κωδικοποιεί τους ασθενείς του ανάλογα με το αν έχουν ή όχι υγειονομική ασφάλεια (1 αν είναι ασφαλισμένοι, 0 διαφορετικά), και επίσης ανάλογα με την κρισιμότητα της κατάστασής τους: καλή (g), ικανοποιητική (f), σοβαρή (s). Θεωρείστε το πείραμα της κωδικοποίησης ενός ασθενούς.

(α) Δώστε μία περιγραφή του δειγματικού χώρου Ω

(β) Έστω A το γεγονός ότι η κατάσταση της υγείας ενός ασθενούς είναι σοβαρή. Ποια τα απλά ενδεχόμενα που περιέχονται στο A ;

(γ) Έστω B το γεγονός ότι ο ασθενής είναι ανασφάλιστος. Ποια τα απλά ενδεχόμενα που περιέχονται στο B ;

(δ) Δώστε όλα τα απλά ενδεχόμενα του γεγονότος $B^c \cup A$.

Άσκηση 5. Αποδείξτε με την μέθοδο της επαγωγής την ανισότητα Bonferroni για n γεγονότα $E_1, E_2, \dots, E_n$:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) \geq P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n) - (n - 1).$$

Άσκηση 6. Τα ακόλουθα δεδομένα δόθηκαν σε μια έρευνα ενός συνόλου 1000 εγγεγραμμένων σε ένα περιοδικό: Αναφορικά με εργασία, οικογενειακή κατάσταση και μόρφωση, υπήρχαν 312 επαγγελματίες, 470 παντρεμένοι, 525 απόφοιτοι κολεγίου, 42 επαγγελματίες απόφοιτοι κολεγίου, 147 παντρεμένοι απόφοιτοι κολεγίου, 86 παντρεμένοι επαγγελματίες και 25 παντρεμένοι επαγγελματίες απόφοιτοι κολεγίου. Αποδείξτε ότι τα νούμερα που αναφέρθησαν στη μελέτη πρέπει να είναι ακριβή.

Βοήθεια: Έστω M , W , και G τα σύνολα των επαγγελματιών, παντρεμένων και αποφοίτων κολεγίου, αντίστοιχα. Υποθέστε ότι ένας από τους 1000 αναγνώστες επιλέγεται τυχαία και δείξτε ότι αν τα νούμερα είναι ακριβή, τότε $P(M \cup W \cup G) > 1$.

Άσκηση 7. Δείξτε ότι η πιθανότητα να συμβεί μόνο ένα από τα γεγονότα E και F είναι ίση με $P(E) + P(F) - 2P(EF)$.

Άσκηση 8. Έστω A το γεγονός ότι η μεσημεριανή θερμοκρασία στο Ηράκλειο είναι 25°C και έστω B το γεγονός ότι η μεσημεριανή θερμοκρασία στην Αθήνα είναι 25°C . Επίσης, έστω C το γεγονός ότι η μέγιστη των δύο μεσημεριανών θερμοκρασιών σε Ηράκλειο και Αθήνα είναι 25°C . Αν $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ και $P(C) = 0.2$, βρείτε την πιθανότητα ότι η ελάχιστη μεταξύ των δύο μεσημεριανών θερμοκρασιών είναι 25°C .