ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

**ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2003**
**Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης**

Λύσεις θεμάτων Προόδου

**Θέμα 1.** Μας δίνεται ότι: $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{4}, P(C) = \frac{2}{3}$.
Επίσης,
A,B ξένα, έτσι $P(AB) = 0$
A,C ανεξάρτητα, έτσι $P(AC) = P(A)P(C) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

$P(B|C) = \frac{1}{4}$ έτσι $P(BC) = P(B|C)P(C) = \frac{1}{4}\frac{2}{3} = \frac{1}{6}$.

Επομένως,
(α) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - 0 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + 0 = \frac{11}{12}$

(β) $P(AB \cup BC \cup CA) = P(AB) + P(BC) + P(CA) - 3P(ABC) + P(ABC) = 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - 3 * 0 + 0 = \frac{1}{2}$

**Θέμα 2.** (α) Η εκφώνηση λέει ότι: $P(E|B) = 0.01$

(β) $P(E) = P(A)P(E|A) + P(B)P(E|B) + P(C)P(E|C) = 0.2 * 0.05 + 0.3 * 0.01 + 0.5 * 0.02 = 0.023$

(γ) $P(B|E) = \frac{P(E|B)P(B)}{P(E)} = \frac{0.01 * 0.3}{0.023} = \frac{3}{23}$

**Θέμα 3.** (α,i) $P(X = 2) = \binom{10}{2} p^2(1-p)^8 = \frac{10!}{2!8!} p^2(1-p)^8 = 45p^2(1-p)^8$

(α,ii) $var(3X + 2) = 9var(X) = 9 * 10 * p * (1-p) = 90p(1-p)$

(β) Για την Poisson δείξαμε ότι $E[X] = var(X) = \lambda = 3$.

$$\begin{aligned} E[Y] = E[(X-2)^2] = E[X^2 - 2X + 4] &= E[X^2] - 4E[X] + 4 \\ &= var(X) + (E[X])^2 - 4E[X] + 4 \\ &= \lambda + \lambda^2 - 4\lambda + 4 = \lambda^2 - 3\lambda + 4 \\ &= 2^2 - 2 * 2 + 4 = 4 \end{aligned}$$

**Θέμα 4.** (α) $E[X] = \frac{1+2+3+4}{4} = 2.5 = E[Y]$

(β) $E[XY] = E[X] * E[Y] = (2.5)^2$ (X,Y ανεξάρτητες)

(γ) Στην ουσία ζητάμε τη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X ως προς το γεγονός $A = \{XY = 4\}$. Εξ ορισμού: $P_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X=x\}\cap A)}{P(A)}$.
Τώρα, $A = \{XY = 4\} = \{X = 1, Y = 4\} \cup \{X = 4, Y = 1\} \cup \{X = 2, Y = 2\}$, με τα 3 ενδεχόμενα αυτά να είναι ξένα μεταξύ τους, έτσι:

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(X = 1, Y = 4) + P(X = 4, Y = 1) + P(X = 2, Y = 2) \\
&= P_{XY}(1, 4) + P_{XY}(4, 1) + P_{XY}(2, 2) \\
&= P_X(1)P_Y(4) + P_X(4)P_Y(1) + P_X(2)P_Y(2) \text{ με } X, Y \text{ανεξάρτητες} \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{4} = \frac{3}{16}
\end{aligned}$$

Επίσης για:

$$\begin{aligned}
x &= 1,\ P(\{X = 1\} \cap A) = P(\{X = 1, Y = 4\}) = \frac{1}{16} \\
x &= 2,\ P(\{X = 2\} \cap A) = P(\{X = 2, Y = 2\}) = \frac{1}{16} \\
x &= 3,\ P(\{X = 3\} \cap A) = P(\emptyset) = 0 \\
x &= 4,\ P(\{X = 4\} \cap A) = P(\{X = 1, Y = 1\}) = \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

Έτσι

$$P(X = k|XY = 4) = \begin{cases} 1/3 & ,\text{αν } k = 1, 2, 4 \\ 0 & ,\text{αν } k = 3 \end{cases}$$

**Θέμα 5.** (α) X είναι διωνυμική τ.μ με παραμέτρους (10,1/2). Επομένως, $E[X] = 10\frac{1}{2} = 5$.

(β) Ο αριθμός των (Γ) στις 6 πρώτες ρίψεις είναι επίσης διωνυμική τ.μ. με (6,1/2). Επομένως:

$$P(A) = P(Y = 4) = \binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6!}{4!2!}(\frac{1}{2})^6 = \frac{15}{64}$$

(γ) Δεδομένου ότι ήρθαν 4 (Γ) στις 6 πρώτες ρίψεις, έχουμε σίγουρα 2(Κ) στις ίδιες ρίψεις. Ο αριθμός των (Κ) στις υπόλοιπες 4 ρίψεις είναι διωνυμική με παραμέτρους (4,1/2) και μέση τιμή $4\frac{1}{2} = 2$. Επομένως, $E[X|A] = 2 + 2 = 4$.

(δ) Κατ΄ αρχάς $P(B) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6!}{4!2!}(\frac{1}{2})^6 = \frac{15}{64}$.
Διαιρούμε τις 10 ρίψεις σε 3 ομάδες: Τις πρώτες 4, τις μεσαίες 2 και τις τελευταίες 4. Το γεγονός $A \cap B$ συμβαίνει όταν ο αριθμός των (Γ) στις 3 αυτές ομάδες είναι αντίστοιχα: είτε: 4,0,2 είτε: 3,1,1 είτε: 2,2,0.
Συνεπώς:

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{4}{4}\binom{2}{0}\binom{4}{2} + \binom{4}{3}\binom{2}{1}\binom{4}{1} + \binom{4}{2}\binom{2}{2}\binom{4}{0}}{2^{10}} = \frac{11}{256}$$

Τελικά

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{11}{256} * \frac{64}{15} = \frac{11}{60}$$

**Θέμα 6.** (α) $\Omega = \{(\text{ΚΚΚ}), (\text{ΚΚΓ}), (\text{ΚΓΚ})\ , (\text{ΓΚΚ}), (\text{ΓΓΚ}), (\text{ΓΚΓ}), (\text{ΚΓΓ}), (\text{ΓΓΓ})\ \}$.
Έχουμε ότι $P(KKK) = P(\text{ΓΓΓ}) = \frac{1}{8}$ και επομένως απόφαση λαμβάνεται με πιθανότητα 3/4 ενώ απαιτείται νέος γύρος με πιθανότητα 1/4.

(β) Ο αριθμός των γύρων Χ που χρειάζονται μέχρι να ληφθεί απόφαση είναι γεωμετρική τ.μ. με $P = 3/4$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
P\{\text{τουλάχιστον 3 γύροι}\} &= P(X > 2) \\
&= 1 - P(X=1) - P(X=2) = 1 - (1-p)^0 p - (1-p)^1 p \\
&= 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\frac{3}{4} = \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

(γ)

$$\begin{aligned}
P\{\text{Χ ζυγός}\} &= P(X=2) + P(X=4) + \ldots \\
&= pq + pq^3 + pq^5 + \ldots \\
&= pq(1 + q^2 + q^4 + \ldots) = pq\sum_{i=0}^{+\infty}(q^2)^i = pq\frac{1}{1-q^2} \\
&= \frac{q(1-q)}{(1-q^2)} = \frac{q}{1+q} = \frac{1/4}{1+1/4} = \frac{1}{5} \text{ με } q = 1-p
\end{aligned}$$

(δ)

$$\begin{aligned}
P\{Q > 2|\text{Χ ζυγός}\} &= \frac{P\{Q > 2 \cap \text{Χ ζυγός}\}}{P\{\text{Χ ζυγός}\}} \\
&= \frac{P(X=4) + P(X=6) + \ldots}{1/5} = (\frac{pq^3 + pq^5 + \ldots}{1/5}) \\
&= \frac{1/5 - P(X=2)}{1/5} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\frac{3}{4}}{1/5} = \frac{1/5 - 3/16}{1/5} \\
&= 1/16
\end{aligned}$$