

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
6 Δεκεμβρίου 2003 - Διάρκεια: 2 Ωρες

Πρώτη Σελίδα: Προσπαθούμε για τη βάση!

Θέμα 1 - 15 μονάδες

Έστω A , B , και C τρία γεγονότα ορισμένα στο δειγματοχώρο Ω ενός πειράματος τύχης. Οι πιθανότητες τους είναι αντίστοιχα:

$$P(A) = 1/2, \quad P(B) = 1/4, \quad P(C) = 2/3.$$

Σας δίδεται ότι τα γεγονότα A και B είναι *ασυμβίβαστα* (ξένα) μεταξύ τους και ότι τα γεγονότα A και C είναι *ανεξάρτητα* μεταξύ τους. Δεδομένου επιπλέον ότι $P(B/C) = 1/4$, υπολογίστε:

- (α) την πιθανότητα ότι συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα γεγονότα A , B , και C .
- (β) την πιθανότητα ότι συμβαίνουν τουλάχιστον δύο από τα γεγονότα A , B , και C .

Θέμα 2 - 15 μονάδες

Μία εταιρία παραγωγής ηλεκτρονικών συσκευών αγοράζει ένα εκατομμύριο αντιστάσεις από τρεις διαφορετικούς προμηθευτές: 20% αγοράζονται από τον προμηθευτή A , 30% αγοράζονται από τον προμηθευτή B και 50% αγοράζονται από τον προμηθευτή C . Από τις αντιστάσεις που αγοράζονται, ένα ποσοστό είναι ελαττωματικές ανάλογα με τον προμηθευτή: 5% των αντιστάσεων του προμηθευτή A είναι ελαττωματικές, 1% του προμηθευτή B και 2% του προμηθευτή C . Επιλέγουμε μία από τις αντιστάσεις στην τύχη.

- (α) Ποια η $P(E/B) =$ η πιθανότητα να είναι ελαττωματική δεδομένου ότι προέρχεται από τον προμηθευτή B ;
- (β) Ποια η $P(E) =$ η πιθανότητα να είναι ελαττωματική;
- (γ) Ποια η $P(B/E) =$ η πιθανότητα να προέρχεται από τον προμηθευτή B δεδομένου ότι είναι ελαττωματική;

Θέμα 3 - 15 μονάδες

(α) Έστω X διωνυμική τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) με παραμέτρους $(10, p)$. Να υπολογίσετε: (i) την πιθανότητα η X να πάρει την τιμή 2 και (ii) τη διασπορά της τ.μ. $2 + 3X$.

(β) Έστω X Poisson τ.μ. Αν $E[X] = 3$, ποια είναι η μέση τιμή της τ.μ. $Y = (X - 2)^2$;

Θέμα 4 - 15 μονάδες

Οι διακριτές ομοιόμορφες τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και παίρνουν ως τιμές τους τέσσερις ακέραιους αριθμούς $\{1, 2, 3, 4\}$. Υπολογίστε τα ακόλουθα:

(α) $E[X]$, (β) $E[XY]$, (γ) $P(X = k/XY = 4)$ για $k = 1, 2, 3, 4$.

Δεύτερη Σελίδα: Η βάση δεν είναι ποτέ αρκετή!!

Θέμα 5 - 20 μονάδες

Έστω 10 ανεξάρτητες διαδοχικές δοκιμές του πειράματος της ρίψης ενός δίκαιου κέρματος.

- (α) Αν X είναι ο αριθμός των κεφαλών (K) που έρχονται στις 10 ρίψεις, ποια είναι η μέση τιμή του X , $E[X]$;
- (β) Έστω A το γεγονός να έρθουν ακριβώς 4 φορές γράμματα (Γ) στις 6 πρώτες ρίψεις. Ποια η πιθανότητα του A , $P(A)$;
- (γ) Ποια η δεσμευμένη μέση τιμή της X δεδομένου του A , $E[X/A]$;
- (δ) Έστω B το γεγονός ότι έρχονται ακριβώς 2 φορές γράμματα (Γ) στις τελευταίες 6 ρίψεις. Βρείτε τις πιθανότητες $P(A \cap B)$ και $P(A/B)$.

Θέμα 6 - 30 μονάδες

Ο Γιώργος, ο Χρήστος και ο Κώστας αποφασίζουν ποιος από τους τρεις θα συνοδεύσει τη Μαρία στο σινεμά με τον ακόλουθο τρόπο. Καθένας ρίχνει ένα δίκαιο νόμισμα. Αν τα δύο από τα τρία νομίσματα φέρουν το ίδιο αποτέλεσμα (π.χ. γράμματα) και το τρίτο νόμισμα φέρει διαφορετικό αποτέλεσμα (δηλαδή κορώνα), τότε αυτός που έριξε το τρίτο συνοδεύει τη Μαρία. Διαφορετικά, αν και τα τρία νομίσματα φέρουν το ίδιο αποτέλεσμα, απαιτείται ένας νέος γύρος ρίψεων.

- (α) Ορίστε το δειγματοχώρο του πειράματος και υπολογίστε την πιθανότητα σε κάποιο γύρο ρίψεων να ληφθεί απόφαση σχετικά με το ποιος συνοδεύει τη Μαρία.
- (β) Ποια η πιθανότητα ότι απαιτούνται τουλάχιστον τρεις γύροι ρίψεων για να ληφθεί απόφαση;
- (γ) Ποια η πιθανότητα ότι λαμβάνεται απόφαση σε ζυγό αριθμό γύρων;
- (δ) Ποια η πιθανότητα ότι απαιτούνται τουλάχιστον τρεις γύροι ρίψεων για να ληφθεί απόφαση δεδομένου ότι απόφαση λαμβάνεται σε ζυγό αριθμό γύρων;