ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2003
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις θεμάτων Εξέτασης Σεπτεμβρίου 2004

ΘΕΜΑ 1^o

(α) (i) $E[W] = E[X] + E[Y]$
x, y ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $[0,1] \Rightarrow E[X] = E[Y] = \frac{0+1}{2}$
$\therefore E[W] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

(ii) Καθώς οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ., $var(W) = var(X) + var(Y)$
Για τις X, Y, $var(X) = var(Y) = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$
$\therefore var(W) = \frac{1}{6}.$

(iii) Αφού οι X, Y είναι ανεξάρτητες, θα είναι και ασυσχέτιστες.
Επομένως $\rho_{xy} = 0$.

(iv) Δεδομένου ότι $X = 0.5$, $W = Y + 0.5$ και η W είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0.5, 1.5]$

(β) Εφόσων η Z είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, 2\pi]$, έχει ς.π.π.

$$f_z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leqslant z \leqslant 2\pi \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin z dz = 0 \\ E[Y] &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos z dz = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = E[XY] = E[\sin Z \cdot \cos Z] \\ &= \frac{1}{2} E[\sin 2Z] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin 2z dz = 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow X, Y$: ασυσχέτιστες.

Από την άλλη, δεν είναι ανεξάρτητες. Πράγματι, αν $Y = -1$, τότε $Z = \pi$ και επομένως $X = 0 : P(X = 0/Y = -1) = 1$. Επίσης, αν $Y = 0$, τότε $Z = \frac{\pi}{2}$ ή $\frac{3\pi}{2}$ και επομένως $X \neq 0 : P(X = 0/Y = 0) = 0$. Δηλαδή, η δεσμευμένη ς.π.π της X δεδομένου $Y = y$ εξαρτάται απο το Y!

ΘΕΜΑ 2^o

(α) Η μέση τιμή της X είναι:
$E[X] = \frac{4-0}{10} \times 0 + \frac{4-1}{10} \times 1 + \frac{4-2}{10} \times 2 + \frac{4-3}{10} \times 3 = 1.$

Η δεύτερη ροπή :
$E[X^2] = \frac{4-0}{10} \times 0 + \frac{4-1}{10} \times 1^2 + \frac{4-2}{10} \times 2^2 + \frac{4-3}{10} \times 3^2 = 2.$

$\Rightarrow \sigma_X^2 = E[X^2] - E^2[X] = 1.$

(β) Η τ.μ. Y μπορεί να εκφραστεί σαν το άθροισμα 2×10^8 ανεξάρτητων τ.μ. $X_1, X_2, \ldots$ με την ίδια κατανομή $p_X(x)$:

$$Y = \sum_{i=1}^{2\times 10^8} X_i.$$

Επομένως:

$$E[Y] = 2 \times 10^8 \cdot E[X] = 2 \times 10^8$$
$$\sigma_Y^2 = 2 \times 10^8 \cdot \sigma_X^2 = 2 \times 10^8$$

(γ) Έστω R το γεγονός ότι το λειτουργικό σύστημα επανεγκαθίσταται σε ένα συγκεκριμένο υπολογιστή. Τότε:

$$\begin{aligned} P(R) &= \sum_{k=0}^{3} P(R/X=k) \cdot P_x(k) = \sum_{k=0}^{3} (1-2^{-k}) \cdot \frac{4-k}{10} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{10} + \frac{7}{8} \times \frac{1}{10} = \frac{31}{80} = 0.3875 \end{aligned}$$

(δ)

$$\begin{aligned} P(X=k/R) &= \frac{P(R/X=k) \cdot P_x(k)}{P(R)} \\ &= \frac{8(1-2^{-k})(4-k)}{31}, \quad k = 0,1,2,3. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3^o

(α) Αυτή είναι η πιθανότητα ότι ο χρήστος μιλάει περισσότερα απο 15 λεπτά. Από την εκφώνηση, η τ.μ. Τ έχει ς.π.π.

$$f_T(t) = \frac{1}{60}e^{-t/60}, t \geqslant 0.$$

Επομένως η πιθανότητα που ζητάμε είναι:

$$P(T \geqslant 15) = \int_{15}^{\infty} \frac{1}{60}e^{-t/60}dt = e^{-15/60} = e^{-1/4}.$$

(β) Υπάρχει η εξής σχέση μεταξύ των τ.μ. Ν και Τ:

$$\begin{array}{lll} N = 0 & \text{σημαίνει} & T < 15 \\ N = 1 & \text{σημαίνει} & 15 \leqslant T < 45 \\ N = 2 & \text{σημαίνει} & 45 \leqslant T < 75 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ N = n & \text{σημαίνει} & 15 + 30(n-1) \leqslant T < 15 + 30n \end{array}$$

Επομένως, η πιθανότητα ότι ο Κώστας δεν χάνει κανένα έλεγχο του $e - mail$ του είναι:

$$P(N = 0) = \int_0^{15} \frac{1}{60}e^{-t/60}dt = \ldots = 1 - e^{-1/4}$$

Αλλιώς,

$$P(N = n) = \int_{30n-15}^{30n+15} \frac{1}{60}e^{-t/60}dt = \ldots = e^{-n/2}(e^{1/4} - e^{-1/4}) = \alpha e^{-bn},$$

όπου $a = (e^{1/4} - e^{-1/4})$, $b = \frac{1}{2}$.

$\therefore$

$$P_N(n) = \begin{cases} 1 - e^{-1/4}, & n{=}0 \\ e^{-n/2}(e^{1/4} - e^{-1/4}), & n > 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

(γ)

$$
\begin{aligned}
E[N] &= 0 \cdot (1 - e^{-1/4}) + \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot e^{-n/2}(e^{1/4} - e^{-1/4}) \\
&= e^{-1/2}(e^{1/4} - e^{-1/4}) \sum_{n=1}^{+\infty} n(e^{-1/2})^{n-1} \\
&= e^{-1/2}(e^{1/4} - e^{-1/4}) \frac{1}{(1 - e^{-1/2})^2} = \frac{e^{-1/4}}{1 - e^{-1/2}} = \frac{1}{e^{1/4} - e^{-1/4}}
\end{aligned}
$$

ΘΕΜΑ 4^o

(α) Έστω Z_k η παραγωγή της κ-στής γραμμής. Απο την εκφώνηση:

$$f_z(z) = \frac{1}{5}e^{-z/5}, \quad z \geqslant 0.$$

$$P(Z > 4) = \int_4^\infty \frac{1}{5}e^{-z/5}dz = e^{-4/5} \approxeq 0.45$$

(β) Καθώς κάθε γραμμή είναι ανεξάρτητη από τις άλλες, η τ.μ. X ακολουθεί Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 3$ και $p = 0.45$:

$$P_X(k) = \binom{3}{k}0.45^k \cdot 0.55^{3-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Έτσι,

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}0.45^2 \cdot 0.55 = 0.334.$$

$$P(E) = P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.55^3 = 0.834.$$

(γ) Η Y είναι επίσης διωνυμική με $n = 100$ και $p = 0.834$

$$P_Y(k) = \binom{100}{k}0.834^k(1 - 834)^{100-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, 100.$$

Προσεγγίζοντας την διωνυμική με την κανονική,

$$\begin{aligned} P(Y > 80) &= 1 - P(Y \leqslant 80) \approx 1 - \Phi(\frac{80.5 - 100 \times 0.834}{\sqrt{100 \times 0.834(1 - 0.834)}}) \\ &= 1 - \Phi(-0.779) = \Phi(0.779) = 0.782. \end{aligned}$$