

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
Διάρκεια: 3 Ωρες

Θέμα 1 - 25 μονάδες. Βασικές Έννοιες.

(α) Δύο ανεξάρτητες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) X και Y είναι ομοιόμορφα κατανομημένες στο διάστημα $[0, 1]$. Ορίζουμε την τ.μ. $W = X + Y$.

(i) Βρείτε τη μέση τιμή της W , $E[W]$.

(ii) Βρείτε τη διασπορά της W , $var(W)$.

(iii) Βρείτε το συντελεστή συσχέτισης των τ.μ. X και Y , ρ_{XY} .

(iv) Δεδομένου ότι $X = 0.5$ βρείτε τη δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. W , δηλαδή βρείτε την $f_{W/X}(w/0.5)$.

(β) Έστω Z μία συνεχής τ.μ. ομοιόμορφα κατανομημένη μεταξύ 0 και 2π . Είναι οι τ.μ. $X = \sin(Z)$ και $Y = \cos(Z)$ ασυσχέτιστες; Είναι ανεξάρτητες;

Υπόδειξη. Χρήσιμη ταυτότητα: $\sin(z) \cos(z) = \frac{1}{2} \sin(2z)$

Θέμα 2 - 25 μονάδες. Ολική Πιθανότητα και Κανόνας του Bayes: Operating system crashes.

Ένα πλήθος από 2×10^8 υπολογιστές τρέχουν το ίδιο λειτουργικό σύστημα. Για κάθε έναν από τους υπολογιστές (οι οποίοι λειτουργούν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο), η συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) της τ.μ. X , η οποία περιγράφει πόσες φορές το λειτουργικό "κρεμάει" σε μία μέρα, δίδεται από τη σχέση:

$$p_X(k) = \frac{4-k}{10}; \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Σε μία τυχαία μέρα, δεδομένου ότι το λειτουργικό πέφτει $X = k$ φορές, ο χρήστης πρέπει να το επανεγκαταστήσει με πιθανότητα $1 - 2^{-k}$.

(α) Βρείτε την μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. X .

(β) Βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. Y , που περιγράφει πόσες φορές συνολικά το λειτουργικό "κρεμάει" για όλους τους υπολογιστές σε μία μέρα.

(γ) Κάνοντας χρήση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας, βρείτε την πιθανότητα ότι το λειτουργικό σύστημα πρέπει να επανεγκατασταθεί σε κάποιο υπολογιστή μία δεδομένη μέρα.

(δ) Κάνοντας χρήση του κανόνα του Bayes, βρείτε τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι το λειτουργικό έχει πέσει $X = k$ φορές σε κάποιον υπολογιστή δεδομένου ότι το λειτουργικό επανεγκαταστήθηκε στον υπολογιστή την συγκεκριμένη μέρα.

Θέμα 3 - 25 μονάδες. Εκθετική Κατανομή: Υπηρεσία dial up.

Ο Κώστας και ο Χρήστος είναι συγγάτοικοι και μοιράζονται την ίδια τηλεφωνική γραμμή. Ο υπολογιστής του Κώστα αυτόματα κάνει dial up για να ελέγξει το e-mail του κάθε μισή ώρα, στις XX:15 και XX:45. Αυτός είναι και ο μοναδικός λόγος που ο Κώστας χρησιμοποιεί το τηλέφωνο και μπορείτε να υποθέσετε ότι αυτά τα dial ups είναι ακαριαία, διακριτά γεγονότα.

Η κοπέλα του Χρήστου τηλεφωνεί στις 10:00 και η διάρκεια της κλήσης είναι μία συνεχής τ.μ. T με εκθετική κατανομή. Καθώς μόλις έχουν γνωριστεί, η μέση διάρκεια της κλήσης είναι 60 λεπτά. Αυτή είναι και η μόνη φορά που ο Χρήστος χρησιμοποιεί το τηλέφωνο. Αν ο Χρήστος μιλάει όταν ο υπολογιστής του Κώστα προσπαθεί να κάνει dial up, ο Κώστας δεν μπορεί να ελέγξει το e-mail του.

(α) Ποια η πιθανότητα ότι ο Κώστας δεν μπορεί να ελέγξει μία ή περισσότερες φορές το e-mail του;

(β) Έστω N ο αριθμός των χαμένων ελέγχων του e-mail. Βρείτε τη συνάρτηση πιθανότητας, $p_N(n) = P(N = n)$; $n = 0, 1, 2, \dots$

Υπόδειξη. Θεωρείστε πρώτα την περίπτωση $n = 0$. Κατόπιν για $n = 1, 2, \dots$, η απάντηση θα είναι στην μορφή $p_N(n) = ae^{-bn}$, όπου θα πρέπει να βρείτε τις σταθερές a και b .

(γ) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός των ελέγχων του e-mail που χάνει ο Κώστας;

Θέμα 4 - 25 μονάδες. Διωνυμική κατανομή και κανονική προσέγγιση.

Ένα εργοστάσιο μικροεπεξεργαστών έχει τρεις γραμμές παραγωγής. Η ποσότητα που παράγεται από κάθε γραμμή είναι τ.μ. που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 5 (χιλιάδες κομμάτια). Υποθέτουμε επίσης ότι κάθε γραμμή λειτουργεί ανεξάρτητα από τις άλλες.

(α) Δείξτε ότι η πιθανότητα μία γραμμή να παράγει περισσότερους από 4 χιλιάδες μικροεπεξεργαστές είναι ίση με 0.45.

(β) Έστω X το πλήθος γραμμών επεξεργασίας με παραγωγή περισσότερα από 4 χιλιάδες κομμάτια. Ποια η συνάρτηση πιθανότητας της X ; Ποια η πιθανότητα δύο ακριβώς από τις τρεις γραμμές να παράγουν περισσότερους από 4 χιλιάδες μικροεπεξεργαστές; Ποια η πιθανότητα τουλάχιστον μία από τις γραμμές να παράγει περισσότερους από 4 χιλιάδες μικροεπεξεργαστές (γεγονός E);

(γ) Καταγράφουμε για ένα διάστημα 100 ημερών τις ημέρες που παρατηρείται το γεγονός E. Έστω Y το πλήθος των ημερών αυτών. Ποια η σ.π. της Y ; Ποια η πιθανότητα να έχουμε καταγράψει περισσότερες από 80 μέρες; Χρησιμοποιείστε την κανονική προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής.

Υπόδειξη. Χρήσιμες τιμές της αθροιστικής συνάρτησης πιθανότητας της τυπικής Γκαουσιανής τ.μ.: $\Phi(0.779) = 0.782$.