ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2003

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2004 - ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

(α) Προφανώς θα πρέπει, $c>0$ (ώστε $f_X(x)\geq 0 \ \forall x$).

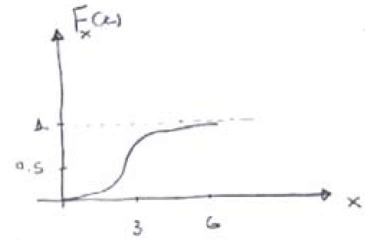
Επίσης $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow c\int_0^3 x\,dx + c\int_3^6 (6-x)\,dx = 1$

$$\Rightarrow c\,\frac{1}{2}x^2\Big|_0^3 + c\left(6x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_3^6 = 1 \Rightarrow 9c = 1 \Rightarrow \boxed{c = 1/9}$$

(β) $\displaystyle F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$ για συνεχείς τ.μ.

Συνεπώς:

- $x<0$: $F_X(x) = 0$
- $0\leq x<3$: $F_X(x) = \dfrac{1}{9}\displaystyle\int_0^x u\,du = \dfrac{x^2}{18}$
- $3\leq x<6$: $F_X(x) = \dfrac{1}{9}\displaystyle\int_0^3 u\,du + \dfrac{1}{9}\int_3^x (6-u)\,du = 1 - \dfrac{(6-x)^2}{18}$
- $x\geq 6$: $F_X(x) = 1$



(γ) $P(A) = P(X>3) = 1 - F_X(3) = 0.5$

$P(B) = P(1.5\leq X\leq 9) = F_X(9) - F_X(1.5) = 1 - 0.125 = 0.875$

(δ) Η τομή των γεγονότων Α και Β είναι το γεγονός $A\cap B = \{3<X\leq 9\}$ και $P(AB) = P(3<X\leq 9) = P(X>3)$
$= 0.5 = P(A) \neq P(A)\cdot P(B)$

$\Rightarrow$ Τα δυο γεγονότα Α, Β <u>δεν</u> είναι ανεξάρτητα.

ΘΕΜΑ 2ο

(α) (i) $Z = 2(X+Y)(X-Y) = 2(X^2 - Y^2)$

Επομένως, $E[Z] = 2\left(E[X^2] - E[Y^2]\right)$

$$= 2\left(\mathrm{var}(X) + E^2[X] - \mathrm{var}(Y) - E^2[Y]\right)$$

$$= 2\left(4 + 1^2 - 9 - 4^2\right) = \underline{-40}.$$

(ii) $\mathrm{cov}(T,U) = \mathrm{cov}(2X+Y,\ 2X-Y)$

$$= \mathrm{cov}(2X,2X) + \mathrm{cov}(2X,-Y) + \mathrm{cov}(Y,2X) + \mathrm{cov}(Y,-Y) \quad \left[\text{χρήση της } \mathrm{cov}\left(\sum_i X_i, \sum_j Y_j\right) = \sum_i \sum_j \mathrm{cov}(X_i, Y_j)\right]$$

$$= 4\,\mathrm{var}(X) - 2\,\mathrm{cov}(X,Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y) - \mathrm{var}(Y)$$

$$= 4 \cdot 4 - 9 = \underline{\underline{7}}$$

(iii) $E[W] = E[3X+Y+2] = 3E[X] + E[Y] + 2 = 3 \cdot 1 + 4 + 2 = \underline{\underline{9}}.$

$$\mathrm{var}(W) = \mathrm{var}(3X+Y+2) = \mathrm{var}(3X+Y) = \mathrm{var}(3X) + \mathrm{var}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(3X,Y)$$

$$= 9\,\mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 6\,\mathrm{cov}(X,Y)$$

$$= 9\,\mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 6\,\rho_{X,Y} \cdot \sqrt{\mathrm{var}(X) \cdot \mathrm{var}(Y)}$$

$$= 9 \cdot 4 + 9 + 6 \cdot 0.1 \cdot \sqrt{4 \cdot 9} = \underline{48.6}$$

(β) $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = 0$ διότι για κάθε περιττή συνάρτηση $g(x)$ όπως η $x \cdot f_X(x)$, $\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 0$.

Επίσης, η $x \cdot |x| \cdot f_X(x)$ είναι επίσης περιττή και συνεπώς

$$E[X \cdot |X|] = \int_{-\infty}^{+\infty} x|x| \cdot f_X(x)\,dx = 0.$$

Επομένως, $\mathrm{cov}(X, |X|) = E[X \cdot |X|] - E[X]\,E[|X|]$

$$= 0 - 0 = 0$$

$\Rightarrow$ οι τ.μ. X & $|X|$ είναι ασυσχέτιστες.

ΘΕΜΑ 3ο

(α,i) $P(|X|<8) = P(-8<X<8) = \Phi\left(\frac{8-2}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-8-2}{10}\right)$

$$= \Phi(0.6) - \Phi(-1) = \Phi(0.6) - (1-\Phi(1))$$

$$= \Phi(0.6) + \Phi(1) - 1$$

(α,ii) $E[(X-4)^2] = E[X^2 - 8X + 16] = E[X^2] - 8E[X] + 16$

$$= var(X) + E^2[X] - 8E[X] + 16 = 100 + 4 - 8\cdot 2 + 16 = \underline{\underline{104}}$$

(α,iii) Εφόσον $Y=(X-2)^2$, η Y παίρνει μη αρνητικές τιμές, $y \geq 0$, $f_Y(y) = 0$ για $y<0$. Για $y \geq 0$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P((X-2)^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X-2 \leq \sqrt{y})$$

$$= P(2-\sqrt{y} \leq X \leq 2+\sqrt{y}) = \Phi\left(\frac{2+\sqrt{y}-2}{10}\right) - \Phi\left(\frac{2-\sqrt{y}-2}{10}\right)$$

$$= \Phi(\sqrt{y}/10) - \Phi(-\sqrt{y}/10) = 2\Phi(\sqrt{y}/10) - 1$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = 2\frac{d}{dy}\Phi(\sqrt{y}/10)$$

Αλλά, η $\Phi(u)$ είναι η αθροιστική συν. κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής και συνεπώς $\frac{d\Phi(u)}{du} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$.

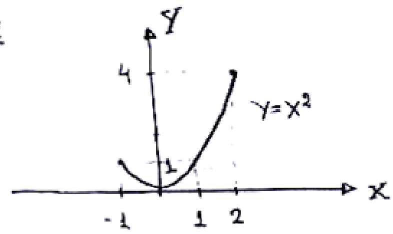
Έτσι, $f_Y(y) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{y}/10)^2} \cdot \frac{d}{dy}(\sqrt{y}/10)$

$$= 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/200} \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}\,10}$$

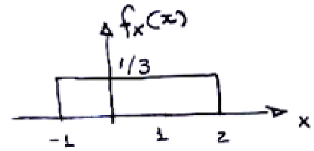
$$\therefore \boxed{f_Y(y) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi y}} e^{-y/200}, \quad y \geq 0}$$

ΘΕΜΑ 4ο

(α)



Η Y παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,4]$.



Για $y<0$, $F_Y(y)=0$. Για $y\geq 0$

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(X^2\leq y)=P(-\sqrt{y}\leq X\leq \sqrt{y})$$

Τώρα: $\bullet\; 0\leq \sqrt{y}\leq 1 \Rightarrow -1\leq -\sqrt{y}\leq X\leq \sqrt{y}\leq 1 \Rightarrow F_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{3}dx=\frac{2}{3}\sqrt{y}$

$\bullet\; 1<\sqrt{y}\leq 2 \Rightarrow -\sqrt{y}<-1\leq X\leq \sqrt{y}\leq 2 \Rightarrow$

$$F_Y(y)=\int_{-1}^{\sqrt{y}}\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}(1+\sqrt{y})$$

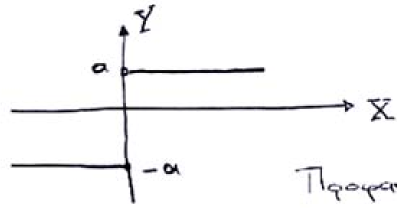
$\bullet\; \sqrt{y}>2 \Rightarrow -\sqrt{y}<-1\leq X\leq 2<\sqrt{y} \Rightarrow F_Y(y)=\int_{-1}^{2}\frac{1}{3}dx=1$

$$\Rightarrow F_Y(y)=\begin{cases}0 & y\leq 0\\ \frac{2}{3}\sqrt{y} & 0<y\leq 1\\ \frac{1}{3}(1+\sqrt{y}) & 1<y\leq 4\\ 1 & y>4\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\begin{cases}1/3\sqrt{y} & 0<y\leq 1\\ 1/6\sqrt{y} & 1<y\leq 4\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}.$$

ΘΕΜΑ 4ο (β)

(i)



Προφανώς η τ.μ. Y είναι διακριτή και παίρνει τιμές ±α.

(ii) $P_Y(a) = P(Y=a) = P(X>0) = 1/2$ αφού η X είναι Γκαουσιανή με μηδενική μέση τιμή.

$P_Y(-a) = P(Y=-a) = P(X\leq 0) = 1/2$

$$\Rightarrow \quad P_Y(y) = \begin{cases} 1/2, & y=a \\ 1/2, & y=-a \end{cases}$$

(iii) Για $X=1.29$, $X-Y = 1.29-1 = 0.29$, $Z=(X-Y)^2 = 0.29^2 = 0.0841$.

Για $X=\pi/4$, $X-Y = \frac{\pi}{4}-1 \approx -0.2146$, $Z=(X-Y)^2 = (-0.2146)^2 = 0.0461$

Για $X=-\pi/4$, $X-Y = -\frac{\pi}{4}-(-1) \approx 0.2146$, $Z=(X-Y)^2 = (0.2146)^2 = 0.0461$

Παρατηρούμε ότι το τετραγωνικό σφάλμα για το $+X$ είναι το ίδιο με αυτό για το $-X$.

(iv) $E[Z] = E[(X-Y)^2] = E[(X-Y)^2 / X>0]\cdot P(X>0) + E[(X-Y)^2/X\leq 0]\cdot P(X\leq 0)$

$= \frac{1}{2} E[(X-a)^2/X>0] + \frac{1}{2} E[(X+a)^2/X\leq 0]$

$= \int_0^{+\infty} (x-a)^2 f_X(x)dx + \int_{-\infty}^{0} (x+a)^2 f_X(x)dx$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 f_X(x)dx - 2a\int_0^{+\infty} x f_X(x)dx + 2a\int_{-\infty}^{0} x f_X(x)dx$

$= var(X) + \mu_X^2 + a^2 - 4a\int_0^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}dx$

$= 1 + 0 + a^2 - 4a\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Για την ελαχιστοποίηση του $E[Z]$,

$\frac{dE[Z]}{da} = 0 \Rightarrow 2a - 4/\sqrt{2\pi} = 0 \Rightarrow \boxed{a=\sqrt{2/\pi}}$

(Η δεύτερη παράγωγος ως προς α είναι $2>0$ ⇒ α είναι όντως ελάχιστο)

ΘΕΜΑ 5º

(α) $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_{1000}$ όπου $X_i = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}$

X_i: είναι Bernoulli τ.μ. με $X_i = 1$ όταν το i-στό πακέτο είναι DVD πακέτο. Επομένως η τ.μ. S_n είναι διωνυμική με παραμέτρους $n = 1000$ και p.

(β) Η τ.μ. S_n έχει μέση τιμή np και διασπορά $= np(1-p)$.

Η τ.μ. $\hat{p} = \dfrac{S_n}{n}$ έχει · μέση τιμή: p
· Διασπορά: $\dfrac{p(1-p)}{n}$

Σύμφωνα με το ΚΟΘ, η $\hat{p}$ μπορεί να προσεγγιστεί από την κανονική κατανομή με $\mu = p$, $\sigma^2 = \dfrac{p(1-p)}{n}$.

(γ) $$P(|\hat{p}-p| \le \delta) = P(-\delta \le \hat{p}-p \le \delta) = P\left(-\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \le \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \le \frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1.$$

· Για $p = 0.5$, $\delta = 0.02$, $P(|\hat{p}-0.5| \le 0.02) = 2\Phi\left(\dfrac{0.02 \cdot \sqrt{1000}}{\sqrt{0.5\ 0.5}}\right) - 1$

$$= 2\Phi(1.265) - 1 = 0.794 = \underline{79.4\%}$$

· Για $p = 0.1$, $\delta = 0.02$ $P(|\hat{p}-0.1| \le 0.02) = 2\Phi\left(\dfrac{0.02\sqrt{1000}}{\sqrt{0.1\ 0.9}}\right) - 1$

$$= 2\Phi(2.108) - 1 = 0.965 = \underline{96.5\%}$$

(δ) Πρέπει $2\Phi\left(\delta\sqrt{\dfrac{1000}{p(1-p)}}\right) - 1 = 0.99 \Rightarrow \Phi\left(\delta\sqrt{\dfrac{1000}{p(1-p)}}\right) = 0.995$

$$\therefore \delta\sqrt{\frac{1000}{p(1-p)}} = 2.58 \Rightarrow \delta = 2.58\sqrt{\frac{p(1-p)}{1000}}$$

Για $p = 0.5$, $\delta = 2.58\sqrt{\dfrac{0.5\ 0.5}{1000}} = \underline{0.04}$

· Για $p = 0.1$, $\delta = 2.58\sqrt{\dfrac{0.1\ 0.9}{1000}} = \underline{0.025}$