Χειμερινό Εξάμηνο 2003 12 Φεβρουαρίου 2004

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
Διάρκεια: 3 Ωρες

Θέμα 1 - 20 μονάδες. Βασικές Έννοιες Κατανομών.

Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των ΗΥ (σε χιλιάδες κομμάτια) που πουλάει η Dell στη διάρκεια μιας μέρας είναι μία τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_X(x) = \begin{cases} cx & \text{αν } 0 \leq x < 3 \\ c(6-x) & \text{αν } 3 \leq x < 6 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α) Βρείτε την τιμή της σταθεράς c.
(β) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.), $F_X(x)$, της X.
(γ) Ποια η πιθανότητα ότι ο αριθμός των ΗΥ που πωλούνται σε μία μέρα (i) ξεπερνά τις 3000, (ii) είναι μεταξύ 1500 και 9000;
(δ) Αν A και B είναι τα γεγονότα (i) και (ii), αντίστοιχα, είναι τα A και B ανεξάρτητα;

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Μέσες τιμές, διασπορές και συσχετίσεις.

(α) Έστω δύο τ.μ. X και Y με $E[X] = 1$, $E[Y] = 4$, $var(X) = 4$, $var(Y) = 9$, και $\rho_{X,Y} = 0.1$.

(i) Αν $Z = 2(X+Y)(X-Y)$, βρείτε την $E[Z]$.
(ii) Αν $T = 2X+Y$ και $U = 2X-Y$, βρείτε την $cov(T,U)$.
(iii) Αν $W = 3X+Y+2$, βρείτε την $E[W]$ και την $var(W)$.

(β) Υποθέστε ότι η σ.π.π. της τ.μ. X είναι μία άρτια συνάρτηση. Δείξτε ότι οι τ.μ. X και $|X|$ είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους.

Θέμα 3 - 20 μονάδες. Κανονική Κατανομή.

Η τ.μ. X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 2$ και διασπορά $\sigma^2 = 100$: $X \sim N(2, 100)$.

(α) $P(|X| < 8) =;$
(Εκφράστε την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(u)$.)
(β) $E[(X-4)^2] =;$
(γ) Έστω η τ.μ. $Y = (X-2)^2$. Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_Y(y)$, της Y.

Θέμα 4 - 25 μονάδες. Μετασχηματισμοί Τυχαίων Μεταβλητών.

(α) Έστω ότι η τ.μ. X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[-1,\ 2]$. Η X μετασχηματίζεται στην τ.μ. $Y = X^2$.

(i) Δώστε τη γραφική παράσταση του μετασχηματισμού και ορίστε το πεδίο τιμών της τ.μ. Y.
(ii) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής, $F_Y(y)$, και κατόπιν τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_Y(y)$, της τ.μ. Y.

(β) Το αναλογικό σήμα X μοντελοποιείται ως μία τυπική Γκαουσιανή τ.μ., $X \sim N(0,\ 1)$. Σε ορισμένες εφαρμογές, μόνο κβαντισμένες τιμές του σήματος απαιτούνται, δηλαδή ένας κβαντιστής (quantizer) μετατρέπει το σήμα συνεχούς πλάτους σε σήμα διακριτού πλάτους. Στην δικιά μας εφαρμογή, το σήμα X μετατρέπεται σε μία από δύο επιτρεπόμενες στάθμες. Έστω Y η τ.μ. που δηλώνει την κβαντισμένη τιμή του σήματος, με $Y = a$ όταν $X > 0$ και $Y = -a$ όταν $X \leq 0$, όπου η θετική σταθερά a καθορίζει τις δύο επιτρεπόμενες στάθμες.

(i) Δώστε τη γραφική παράσταση του μετασχηματισμού. Είναι η Y συνεχής ή διακριτή τ.μ.;
(ii) Ποια είναι η συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας της τ.μ. Y;
(iii) Έστω ότι $a = 1$. Αν το σήμα X συμβεί να πάρει την τιμή 1.29, ποιο είναι το σφάλμα της αναπαράστασης της X από την Y; Ποιο το τετράγωνο του σφάλματος, $Z = (X - Y)^2$; Ποιες είναι οι τιμές των σφαλμάτων και των τετραγώνων τους όταν $X = \pi/4$ και $X = -\pi/4$;
(iv) Είστε ο μηχανικός που θα σχεδιάσει τον κβαντιστή που ελαχιστοποιεί τη μέση τιμή του τετραγώνου του σφάλματος (το λεγόμενο μέσο τετραγωνικό σφάλμα, mean-square error, MSE), $E[Z]$. Η μόνη παράμετρος σχεδίασης είναι η επιλογή της τιμής του a. Βρείτε την έκφραση του $E[Z]$ ως συνάρτηση του a και μετά βρείτε την τιμή του a που ελαχιστοποιεί το $E[Z]$.

Βοήθεια: Για να βρείτε το $E[Z]$, χρησιμοποιείστε το θεώρημα της ολικής πιθανότητας, υπολογίζοντας το $E[Z]$ όταν $X > 0$ και $X \leq 0$. Επίσης, χρησιμοποιείστε τη σχέση $\int_0^\infty xe^{-x^2/2}dx = 1$.

Θέμα 5 - 25 μονάδες. Οριακά Θεωρήματα.

Ο μηχανικός της υπηρεσίας συστημάτων και δικτύων του Υπολογιστικού Κέντρου του Πανεπιστημίου Κρήτης θέλει να εκτιμήσει το ποσοστό, p, των πακέτων πληροφορίας που ταξιδεύουν μέσα από την οπτική ίνα που συνδέει την Κνωσό και τις Βούτες, τα οποία είναι πακέτα ψηφιακού video (digital video disk, DVD). Ο μηχανικός γράφει ένα script για να ελέγξει συνολικά $n = 1000$ πακέτα, μετράει το πλήθος, S_n, των DVD πακέτων, και χρησιμοποιεί τη σχέση $\hat{p} = S_n/1000$ ως τον εκτιμητή του p. Τα πακέτα που ελέγχονται διαχωρίζονται από εκατοντάδες άλλα πακέτα, συνεπώς είναι λογικό να υποθέσουμε ότι κάθε πακέτο είναι ένα DVD πακέτο με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τα άλλα πακέτα.

(α) Τι είδους τυχαία μεταβλητή είναι η S_n; Ορίστε πλήρως τις παραμέτρους της.
(β) Βάσει του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, ποια είναι η κανονική προσέγγιση για την τ.μ. $\hat{p} = S_n/1000$;
(γ) Βρείτε την πιθανότητα ο εκτιμητής $\hat{p}$ να κάνει λάθος λιγότερο από 2%, δηλαδή υπολογίστε την $P(|\hat{p} - p| \leq 0.02)$. Υπολογίστε την αριθμητική τιμή αυτής της πιθανότητας όταν $p = 0.5$ και όταν $p = 0.1$. Τι παρατηρείτε; (χρησιμοποιείστε το (β) και ότι $\Phi(1.265) = 0.897$, $\Phi(2.108) = 0.9825$.)
(δ) Βρείτε τον αριθμό δ για τον οποίο $P(|\hat{p} - p| < \delta) \approx 0.99$ όταν $p = 0.5$ και όταν $p = 0.1$. ($\Phi(2.58) = 0.995$.)