ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2003
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

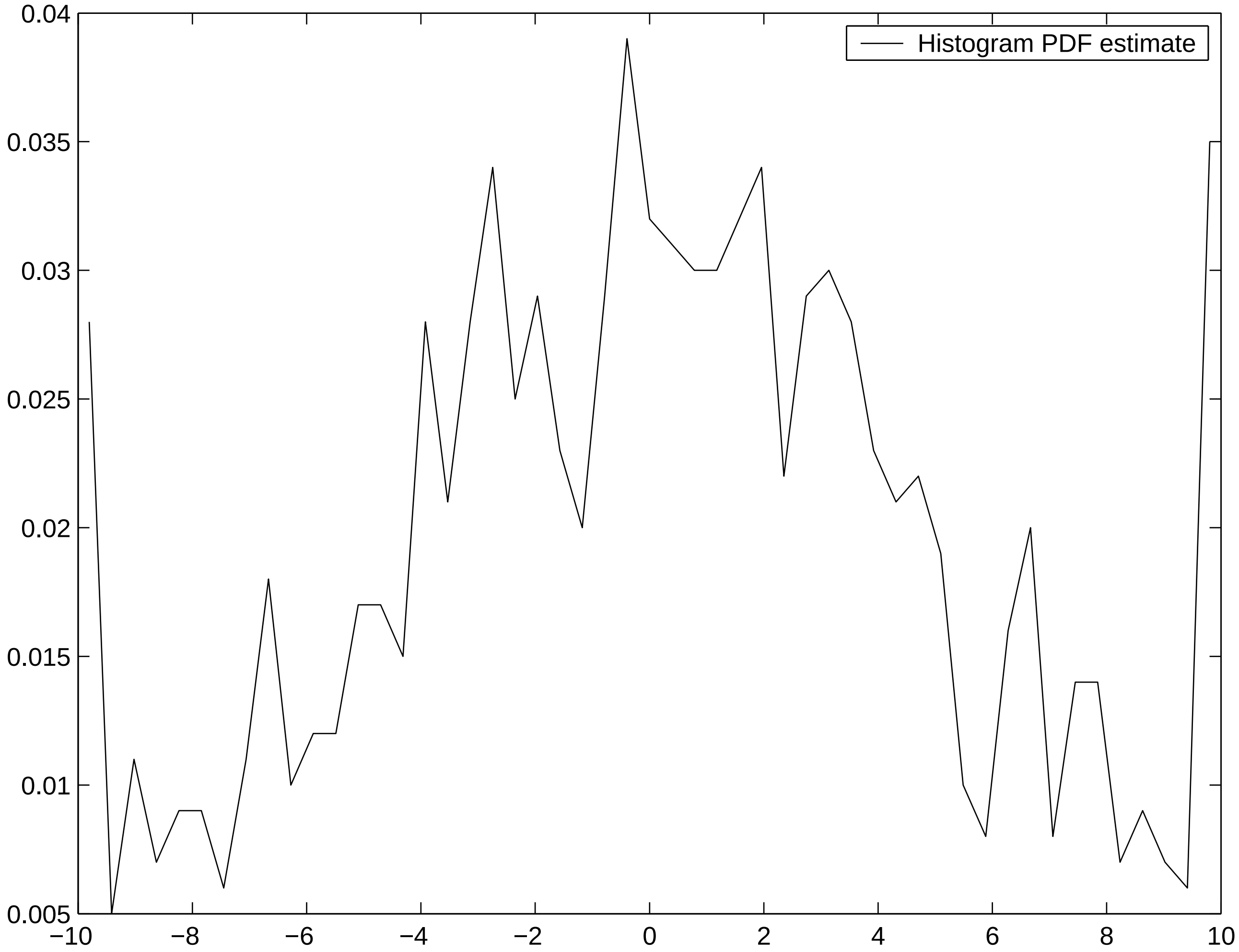
Λύσεις Έβδομης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 15/01/2003 Ημερομηνία Παράδοσης: 23/01/2003

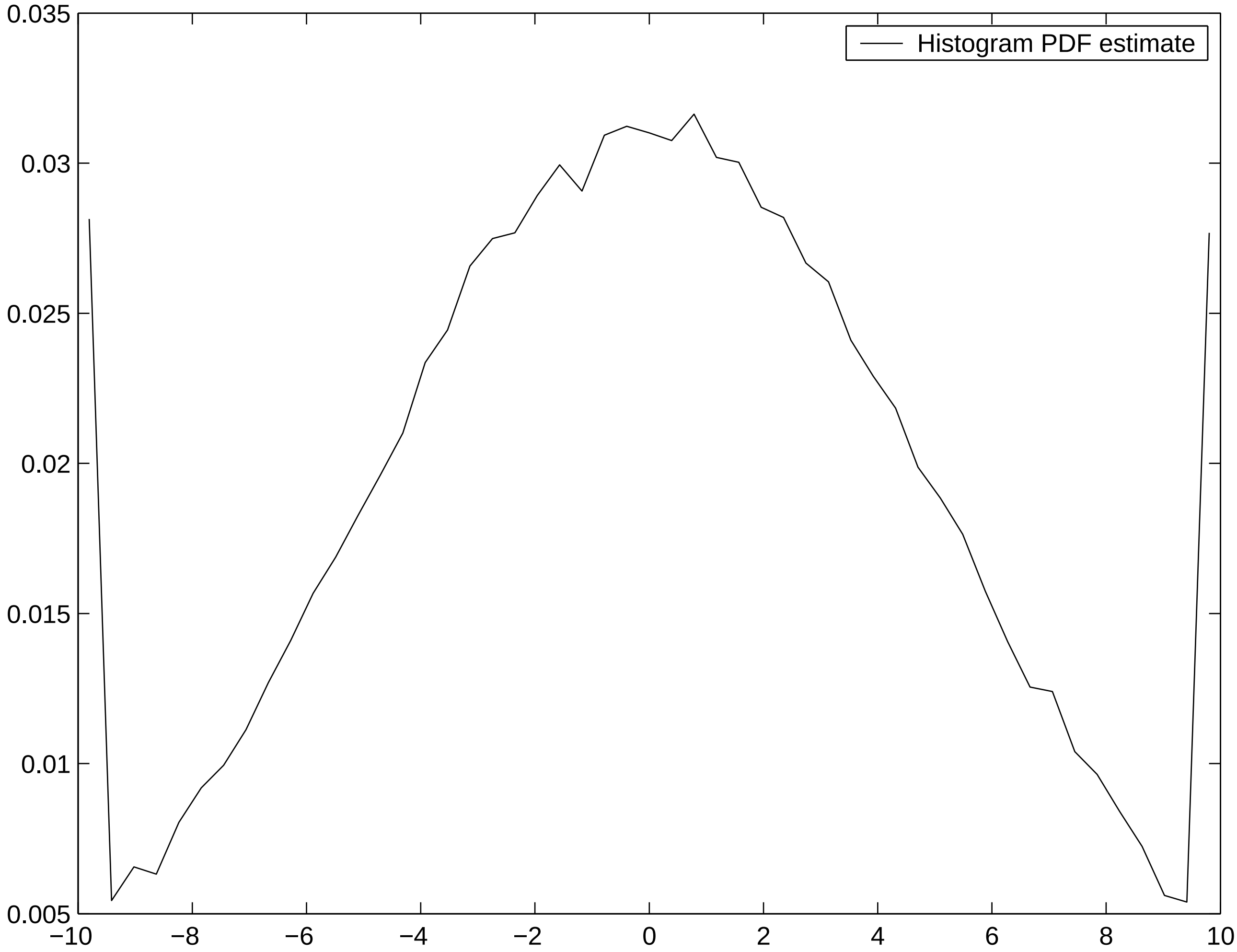
Άσκηση 1.
(α) Διακρίνουμε 4 περιπτώσεις ανάλογα με την τιμή της Y.

- $Y > 10$ ή $Y < -10$ τότε $f_Y(y) = 0$
- $P(Y = -10) = P(X \leq -10) = P\left(\frac{X-0}{5} \leq -\frac{10}{5}\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$
- $P(Y = 10) = P(X \geq 10) = P\left(\frac{X-0}{5} \geq \frac{10}{5}\right) = 1 - \Phi(2)$
- $|Y| < 10$ τότε $f_Y(y) = f_X(x)\big|_{x=y} = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{50\pi}}$

(β) Η προσέγγιση της σ.π.π της Y με $N = 10^3$ και $N = 10^5$ σημεία φαίνεται στα σχήματα 1 και 2 αντίστοιχα. Από ότι παρατηρούμε και από τα διαγράμματα, όσο λιγότερα σημεία έχουμε, τόσο λιγότερα σημεία πέφτουν μέσα στα ισαπέχοντα bins και άρα τόσο χειρότερη είναι η μέτρηση της σχετικής συχνότητας και η προσέγγιση της σ.π.π της τυχαίας μεταβλητής.



Σχήμα 1: η προσέγγιση της γκαουσσιανής με $N = 10^3$



Σχήμα 2: η προσέγγιση της γκαουσσιανής με $N = 10^5$

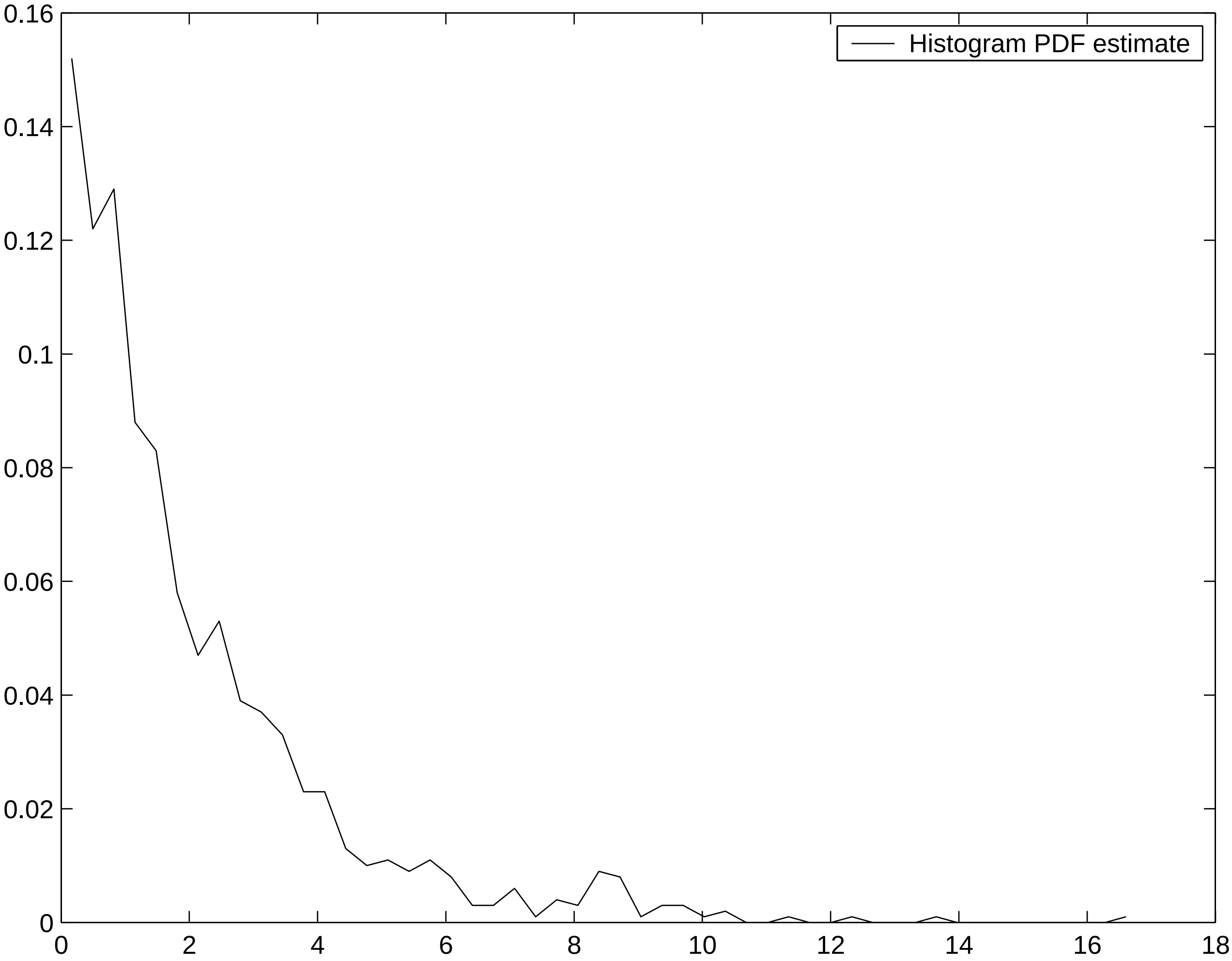
Άσκηση 2.
(α) Εφόσον $X \in [0,1] \Longrightarrow \ln X <= 0 \Longrightarrow -\frac{1}{\alpha}\ln X <= 0$ με $\alpha > 0$
Έτσι

- Αν $y < 0 \Longrightarrow F_Y(y) = f_Y(y) = 0$
- Αν $y \geq 0$ τότε

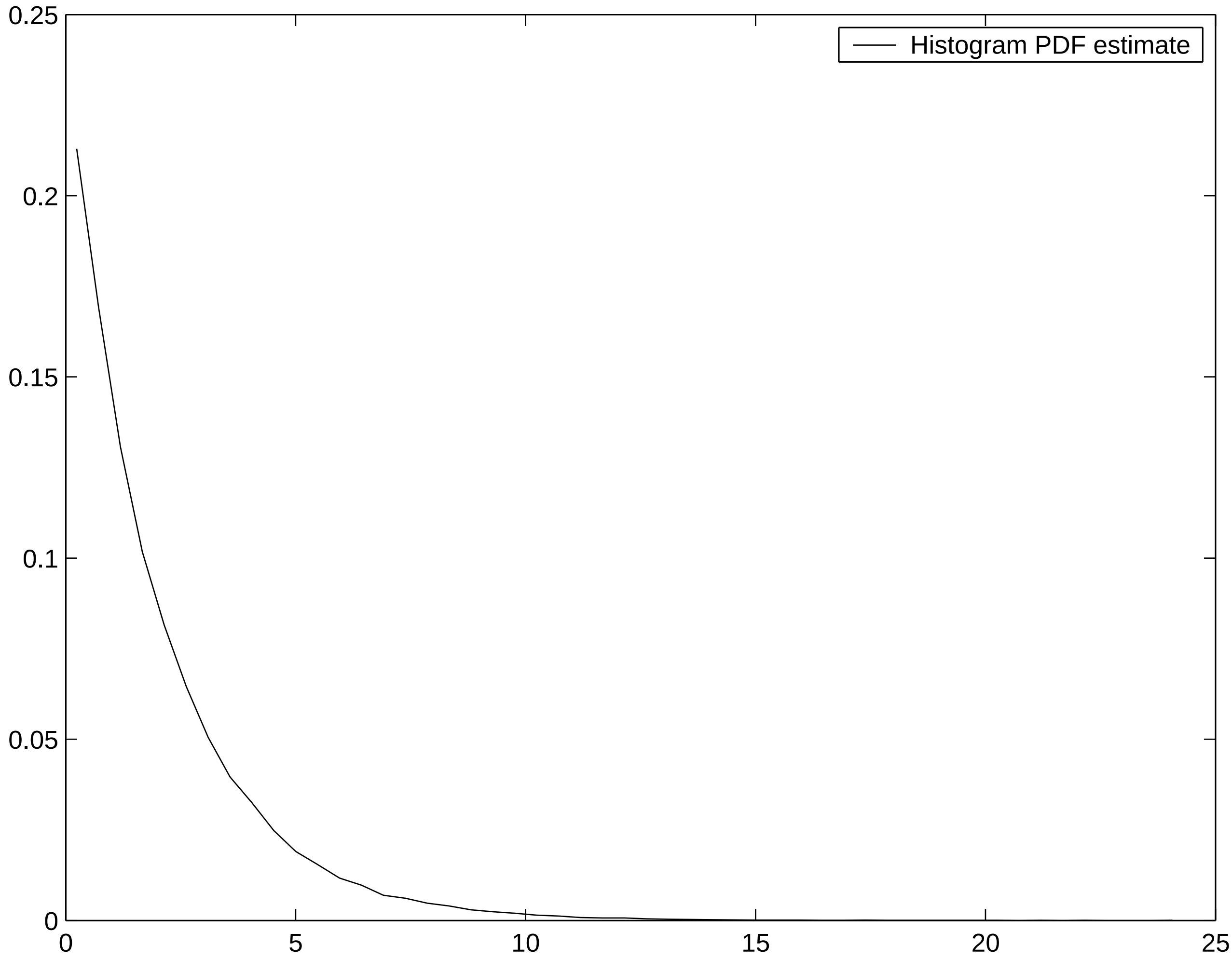
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(-\frac{1}{\alpha}\ln X \leq y) \\ &= P(\ln X \geq -\alpha y) \\ &= P(X \geq e^{-\alpha y}) = 1 - P(X \leq e^{-\alpha y}) \\ &= 1 - \int_0^{e^{-\alpha y}} 1 dx = 1 - e^{-\alpha y} \end{aligned}$$

και $f_Y(y) = \alpha e^{-\alpha y}$

(β)



Σχήμα 3: η προσέγγιση της εκθετικής με $N = 10^3$



Σχήμα 4: η προσέγγιση της εκθετικής με $N = 10^5$

Άσκηση 3.

(α)

$$P\{|X| > 1/2\} = P\{X > 1/2\} + P\{X < -1/2\} = 1/2$$

(β)

$$P\{|X| \leq \alpha\} = P\{-\alpha \leq X \leq \alpha\} = \alpha$$

Επομένως,

$$f_{|X|}(\alpha) = 1,\ 0 < \alpha < 1$$

Άρα, η $|X|$ είναι ομοιόμορφη στο (0,1).

Άσκηση 4.

$$\begin{aligned} P\{F(X \leq x)\} &= P\{X \leq F^{-1}(x)\} \\ &= F(F^{-1}(x)) \\ &= x \end{aligned}$$

Άσκηση 5.
(α)

$$\begin{aligned} Var(\bar{X}) &= (\frac{1}{n})^2 Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) \\ &= (\frac{1}{n})^2 \sum_{i=1}^{n} Var(X_i), \text{ μέσω ανεξαρτησίας} \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

(β) Ξεκινάμε με την ακόλουθη αλγεβρική ταυτότητα:

$$\begin{aligned} (n-1)S^2 &= \sum_{i=1}^{n} \big(X_i - \mu + \mu - \bar{X}\big)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(X_i - \mu\big)^2 + \sum_{i=1}^{n} \big(\bar{X} - \mu\big)^2 - 2\big(\bar{X} - \mu\big) \sum_{i=1}^{n} \big(X_i - \mu\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(X_i - \mu\big)^2 + n\big(\bar{X} - \mu\big)^2 - 2\big(\bar{X} - \mu\big) n \big(\bar{X} - \mu\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(X_i - \mu\big)^2 - n\big(\bar{X} - \mu\big)^2 \end{aligned}$$

Παίρνοντας αναμενόμενη τιμή στο προηγούμενο έχουμε

$$\begin{aligned} (n-1)E(S^2) &= \sum_{i=1}^{n} E\big[\big(X_i - \mu\big)^2\big] - nE\big[\big(\bar{X} - \mu\big)^2\big] \\ &= n\sigma^2 - nVar(\bar{X}) \\ &= (n-1)\sigma^2 \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας ότι $E[X] = \mu$. Διαιρώντας με $n-1$ έχουμε ότι η αναμενόμενη τιμή της δειγματικής διασποράς είναι η διασπορά της κατανομής σ^2.

Άσκηση 6. Έστω

$$X_i = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{το ζάρι i προσγειώνεται στον άσσο} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{array} \right\}$$

$$Y_i = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{το ζάρι i προσγειώνεται στο δύο} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} Cov(X_i, Y_i) &= E[X_iY_j] - E[X_i]E[Y_j] \\ &= \left\{ \begin{array}{cc} -\frac{1}{36} & i = j \text{ αφού } X_iY_j = 0 \text{ όταν } i = j \\ \frac{1}{36} - \frac{1}{36} = 0 & i \neq j \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(\sum_i X_i, \sum_j Y_j) &= \sum_i \sum_j Cov(X_i, Y_j) \\ &= -\frac{n}{36} \end{aligned}$$

Άσκηση 7.

$$Cov(Y_n, Y_n) = Var(Y_n) = 3\sigma^2$$

$$\begin{aligned} Cov(Y_n, Y_{n+1}) &= Cov(X_n + X_{n+1} + X_{n+2}, X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+3}) \\ &= Cov(X_{n+1} + X_{n+2}, X_{n+1} + X_{n+2}) = 2\sigma^2 \\ Cov(Y_n, Y_{n+2}) &= Cov(X_{n+2}, X_{n+2}) = \sigma^2 \\ Cov(Y_n, Y_{n+j}) &= 0 \text{ όταν } j \geq 3 \end{aligned}$$