ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2003
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έβδομη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 15/01/2004 Ημερομηνία Παράδοσης: 23/01/2004

Άσκηση 1. Δειγματοληπτούμε το σήμα εξόδου ενός μικροφώνου και θεωρούμε τις μετρήσεις μας ως πειραματικές τιμές μιας Γκαουσιανής τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) X με μηδενική μέση τιμή ($\mu_X = 0$) και τυπική απόκλιση ίση με 5 Volts ($\sigma_X = 5$). Η έξοδος του μικροφώνου τροφοδοτείται σε ένα ενισχυτή. Για την αποφυγή της υπερφόρτωσης του ενισχυτή, χρησιμοποιούμε ένα κύκλωμα αποκοπής (clipping circuit):

$$Y = c(X) = \begin{cases} X, & |X| \leq 10 \\ -10, & X < -10 \\ 10, & X > 10 \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε θεωρητικά τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της τ.μ. Y.
(β) Γράψτε ένα απλό πρόγραμμα (σε MATLAB) για να δημιουργήσετε $N = 10^3$ πειραματικές τιμές των τ.μ. X και Y. Χρησιμοποιείστε τη συνάρτηση `randn()` της MATLAB για τη δημιουργία των τιμών της τ.μ. X. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `hist()` της MATLAB δώστε τη γραφική παράσταση της προσέγγισης της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. Y (το λεγόμενο και *ιστόγραμμα* της Y) και συγκρίνετέ την με την ακριβή γραφική παράσταση της σ.π.π. της Y που έχετε υπολογίσει στο (α).
(γ) Επαναλάβετε το βήμα (β) για $N = 10^5$. Τι παρατηρείτε στην προσέγγιση της σ.π.π. της Y;

Υπόδειξη: Ένα MATLAB primer μπορείτε να βρείτε στην ιστοσελίδα του μαθήματος. Για την γραφική παράσταση του ιστογράμματος, χρησιμοποιείστε τις ακόλουθες εντολές:

```
miny = min(y);
maxy = max(y);
NumBins = 51;
h = hist(y,NumBins);
for k=1:NumBins,
bincenters(k) = miny + ((maxy-miny)/NumBins)*(k-1/2);
end
h = h / sum(h); % normalize PDF estimate
plot(bincenters,h);
legend('Histogram PDF estimate');
```

Άσκηση 2. Θέλουμε να δημιουργήσουμε μια εκθετική τ.μ. Y, αλλά διαθέτουμε μόνο μια γεννήτρια ομοιόμορφων τ.μ. ορισμένων στο διάστημα $[0, 1]$. Π.χ. στο MATLAB, μια τέτοια γεννήτρια είναι η συνάρτηση `rand()`.
(α) Έστω λοιπόν X μια ομοιόμορφη τ.μ. στο διάστημα $[0, 1]$. Δείξτε αναλυτικά ότι η νέα τ.μ. $Y = -(1/a)\ln(X)$ είναι εκθετικά κατανεμημένη με μέση τιμή $1/a$.
(β) Δημιουργείστε $N = 10^3$ πειραματικές τιμές της εκθετικής τ.μ. Y με παράμετρο $a = 0,5$. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `hist()` της MATLAB, δώστε τη γραφική παράσταση της προσέγγισης της σ.π.π. της τ.μ. Y και συγκρίνετέ την με την ακριβή γραφική παράσταση της σ.π.π. της Y. Επαναλάβετε για $N = 10^5$.

Άσκηση 3. Η τ.μ. X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $(-1,\ 1)$. Βρείτε: (α) την πιθανότητα $P(|X| > 1/2)$, και (β) την σ.π.π. της τ.μ. $|X|$.

Άσκηση 4. Η συνεχής τ.μ. X έχει αθροιστική συνάρτηση κατανομής την $F(x)$. Ορίζουμε τη νέα τ.μ. Y ως $Y = F(X)$. Δείξτε ότι η Y είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $(0,\ 1)$.

Άσκηση 5. Έστω $X_1, \ldots, X_n$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και όμοια (δηλαδή με την ίδια σ.π.π.) κατανεμημένων τ.μ. (independent, identically distributed random variables - iid rv's), που έχουν μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Ορίζουμε το λεγόμενο *δειγματικό μέσο όρο* (sample mean) ως τη τ.μ.

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}.$$

Οι ποσότητες $X_i - \bar{X},\ i = 1, \ldots, n$, ονομάζονται *αποκλίσεις,* μια που είναι ίσες με τις διαφορές μεταξύ των δεδομένων X_i και του δειγματικού μέσου όρου, $\bar{X}$. Η τ.μ.

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

ονομάζεται *δειγματική διασπορά* (sample variance). Τόσο ο δειγματικός μέσος όρος όσο και η δειγματική διασπορά αποτελούν σημαντικά στατιστικά εργαλεία στη μελέτη πολλών προβλημάτων εφαρμογών μηχανικής. Βρείτε: (α) $var(\bar{X})$ και (β) $E[S^2]$ για να δείξετε ότι η δειγματικη διασπορά είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής της διασποράς σ^2 των τ.μ. X_i.

Άσκηση 6. Έστω X ο αριθμός των 1 και Y ο αριθμός των 2 που έρχονται σε n ρίψεις ενός δίκαιου εξάεδρου ζαριού. Υπολογίστε την συνδιασπορά των X και Y, $cov(X, Y)$.

Άσκηση 7. Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με κοινή μέση τιμή μ και κοινή διασπορά σ^2. Ορίζουμε τις τ.μ. $Y_n = X_n + X_{n+1} + X_{n+2}$. Για $j \geq 0$, βρείτε τις $cov(Y_n, Y_{n+j})$.