ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2003
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Έκτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 17/12/2003 Ημερομηνία Παράδοσης: 14/01/2003

Άσκηση 1.
(α)

$$\int_{10}^{\infty} \frac{10}{x^2} dx = [\frac{-10}{x}]_{20}^{\infty} = 1$$

(β)

$$F(y) = \int_{10}^{y} \frac{10}{x^2} dx = 1 - \frac{10}{y} \text{ , για } y > 10.$$

(γ) $\sum_{i=3}^{6} \binom{6}{i} \left(\frac{2}{3}\right)^{i} \left(\frac{1}{3}\right)^{6-i}$ αφού $P(X > 15) = \frac{10}{15}$. Υποθέτοντας ανεξαρτησία των γεγονότων ότι οι συσκευές υπερβαίνουν τις 15 ώρες λειτουργίας.

Άσκηση 2.(α) Αν χωρίσουμε το μισάωρο σε 3 δεκάλεπτα εφ' όσον η κατανομή είναι ομοιόμορφη η πιθανότητα να έρθει μέσα στο κάθε δεκάλεπτο είναι 1/3. Έτσι $P\{X > 10\} = \frac{2}{3}$.

(β)

$$P\{X > 25 | X > 15\} = \frac{P\{X > 25\}}{P\{X > 15\}} = \frac{5/30}{15/30} = 1/3$$

με την X ομοιόμορφη στο (0,30).

Άσκηση 3.

$$P\{X > 50\} = P\{\frac{X - 40}{4} > \frac{10}{4}\} = 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938$$

Έτσι, $\left(P\{X < 50\}\right)^{10} = (0.9938)^{10}$ υποθέτοντας ότι η βροχόπτωση είναι ανεξάρτητη ανά έτος.

Άσκηση 4.(α) $P\{X > 20\} = e^{-20000*1/20000} = e^{-1}$

(β) $P\{X > 30 | X > 10\} = \frac{P\{X>30\}}{P\{X>10\}} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$

Άσκηση 5. Αν καταθέσεις πρόταση με x Ευρώ, βγάζεις κέρδος $x - 100$ με πιθανότητα $(140 - x)/70$, ή χάνεις και δεν έχεις κέρδος. Επομένως, το αναμενόμενο κέρδος αν προσφέρεις x Ευρώ, είναι

$$\frac{1}{70}(x-100)(140-x) = \frac{1}{70}(240 * x - x^2 - 14000)$$

Παραγωγίζοντας και θέτοντας με μηδέν για να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος έχουμε

$$240 - 2 * x = 0$$

Επομένως, πρέπει να ποντάρεις 120 χιλιάδες Ευρώ. Το αναμενόμενο κέρδος σου θα είναι 40/7 χιλιάδες Ευρώ.

Άσκηση 6. (α) $F_{A,B,C}(\alpha, b, c) = \alpha bc$ με $0 < \alpha, b, c < 1$

(β) Οι ρίζες θα είναι αληθινές αν $B^2 \geq 4AC$. Τώρα,

$$\begin{aligned} P\{AC \leq x\} &= \int_{\substack{c \leq x/\alpha \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \\ 0 \leq c \leq 1}} \int d\alpha dc \\ &= \int_0^x \int_0^1 dc d\alpha + \int_x^1 \int_0^{x/\alpha} dc d\alpha \\ &= x - x \log x \end{aligned}$$

Έτσι, $F_{AC}(x) = x - x \log x$ και
$f_{AC}(x) = -\log x$, $0 < x < 1$

$$\begin{aligned} P\{B^2/4 \geq AC\} &= -\int_0^1 \int_0^{b^2/4} \log x dx db \\ &= \int_0^1 [\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} \log(b^2/4)] db \\ &= \frac{\log 2}{6} + \frac{5}{36} \end{aligned}$$

όπου η παραπάνω χρησιμοποιεί την ταυτότητα

$$\int x^2 \log x dx = \frac{x^3 \log x}{3} - \frac{x^3}{3}$$

Άσκηση 7. (α) Όχι δεν είναι ανεξάρτητες αφού η απο κοινού συνάρτηση πυκνότητας δεν παραγοντοποιείται.

(β) $f_X(x) = \int_0^1 (x+y) dy = x + 1/2$, $0 < x < 1$

(γ)

$$\begin{aligned} P\{X + Y < 1\} &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y) dy dx \\ &= \int_0^1 [x(1-x) + (1-x)^2/2] dx = 1/3 \end{aligned}$$

Άσκηση 8. (α)

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{xe^{-x(y+1)}}{\int xe^{-x(y+1)}dx} = ((y+1)^2 xe^{-x(y+1)}),\ 0 < x$$

(β)

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{xe^{-x(y+1)}}{\int xe^{-x(y+1)}dy} = xe^{-xy},\ 0 < y$$

$$\begin{aligned} P\{XY < \alpha\} &= \int_0^\infty \int_0^{\alpha/x} xe^{-x(y+1)}dydx \\ &= \int_0^\infty (1-e^{-\alpha})e^{-x}dx = 1 - e^{-\alpha} \end{aligned}$$

$$f_{X|Y}(\alpha) = e^{-\alpha},\ 0 < \alpha$$

Άσκηση 9. (α) Έστω X ο επιλεγμένος αριθμός. Τότε, η X είναι τυχαία συνεχής μεταβλητή, ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα (0,1).
(α) $P(0.1 \leq X \leq 0.2) = 0.2 - 0.1 = 0.1$

(β) $P(\text{δεύτερο ψηφίο} = 2) = \sum_{k=0}^{9} P(0.k2 \leq X < 0.k3) = 10 * 0.01 = 0.1$

(γ) $P(0.3 \leq \sqrt{X} < 0.4) = P(0.09 \leq X < 0.16) = 0.07$

Άσκηση 10. (α)

$$\begin{aligned}
P(X\text{δεν ξεπερνά τα όρια}) &= P\{(0.9-0.005)\leq X<(0.9+0.005)\}\\
&= P\{\frac{0.895-0.9}{0.003}\leq\frac{X-0.9}{0.003}<\frac{0.9+0.005-0.9}{0.003}\}\\
&= P\{-\frac{5}{3}\leq Z<\frac{5}{3}\}=\Phi(\frac{5}{3})-\Phi(-\frac{5}{3})\\
&= \Phi(\frac{5}{3})-\big(1-\Phi(\frac{5}{3})\big)=2\Phi(\frac{5}{3})-1\\
&= 2*0.9522-1=0.9044
\end{aligned}$$

Έτσι η πιθανότητα η βίδα να είναι ελαττωματική είναι $1-0.9044=0.0956$ που σημαίνει ότι 9.56% των βιδών της εταιρείας είναι ελαττωματικές.

(β) Από το ερώτημα (α), μπορεί να δειχθεί ότι

$$\begin{aligned}
P(X\text{δεν ξεπερνά τα όρια}) &= P\{(0.9-0.005)\leq X<(0.9+0.005)\}\\
&= P\{-\frac{5}{3}\leq Z<\frac{5}{3}\}=\Phi(\frac{5}{3})-\Phi(-\frac{5}{3})\\
&= 2\Phi(\frac{0.005}{\sigma})-1
\end{aligned}$$

Επίσης, $P(X \text{ είναι ελαττωματική})<0.01\Longrightarrow P(X\text{δεν ξεπερνά τα όρια})>0.99$. Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση στην παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$\begin{aligned}
2\Phi(\frac{0.005}{\sigma})-1 &> 0.99 \text{ ή}\\
\Phi(\frac{0.005}{\sigma}) &> \frac{1.99}{2}=0.995=\Phi(2.575)
\end{aligned}$$

Εφόσον η $\Phi(x)$ είναι μονότονη, αυτό ισοδυναμεί με

$$\frac{0.005}{\sigma}>2.575$$

Έτσι

$$\sigma_{max}=\frac{0.005}{2.575}>1.942*10^{-3}$$

Άσκηση 11. (α) Για να εξακριβώσουμε αν η $f_X(x)$ είναι έγκυρη ς.π.π ελέγχουμε τις 2 παρακάτω συνθήκες:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{3}{4}\{1-(1-x)^2\} = \frac{3}{4}x(2-x) \geq 0 \ \forall x \in [0,2] \\ \int_0^2 f_X(x)dx &= \frac{3}{4}\int_0^2 (2x-x^2)dx = \frac{3}{4}(x^2 - \frac{x^2}{3})\big|_0^2 = 1 \end{aligned}$$

Επομένως, η $f_X(x)$ είναι έγκυρη ς.π.π και στο σχήμα 1 φαίνεται το διάγραμμα της.

(β) Όχι.

(γ) Για $0 \leq C \leq 2$ η πιθανότητα ότι η ζήτηση ικανοποιείται ως συνάρτηση της C ορίζεται ως

$$\begin{aligned} P(\text{η ζήτηση ικανοποιείται}) &= P(\text{ζήτηση} < \text{χωρητικότητα}) \\ &= P(X < C) \\ &= \frac{3}{4}\int_0^C (2x-x^2)dx \\ &= \frac{3}{4}(x^2 - \frac{x^3}{3})\big|_0^C = \frac{3}{4}(C^2 - \frac{C^3}{3} \end{aligned}$$

Όταν $C = 1$, $P(\text{ζήτηση ικανοποιείται}) = \frac{1}{2}$. Το σχήμα 2 δείχνει την πιθανότητα να ικανοποιείται η ζήτηση ως συνάρτηση της C.

(δ) Η ελάχιστη τιμή της C που εξασφαλίζει ότι η πιθανότητα η ζήτηση να υπερβαίνει την παροχή είναι μικρότερη της 10^{-1} είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned} P(X > C) &< \frac{1}{10} \\ \Rightarrow P(X < C) &= 1 - P(X > C) > 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \\ \Rightarrow \frac{3}{4}(C^2 - \frac{C^3}{3} &> \frac{9}{10} \end{aligned}$$

Από το προηγούμενο σχήμα φαίνεται ότι η ελάχιστη τιμή της C που ικανοποιεί την ανισότητα είναι περίπου 1.61.

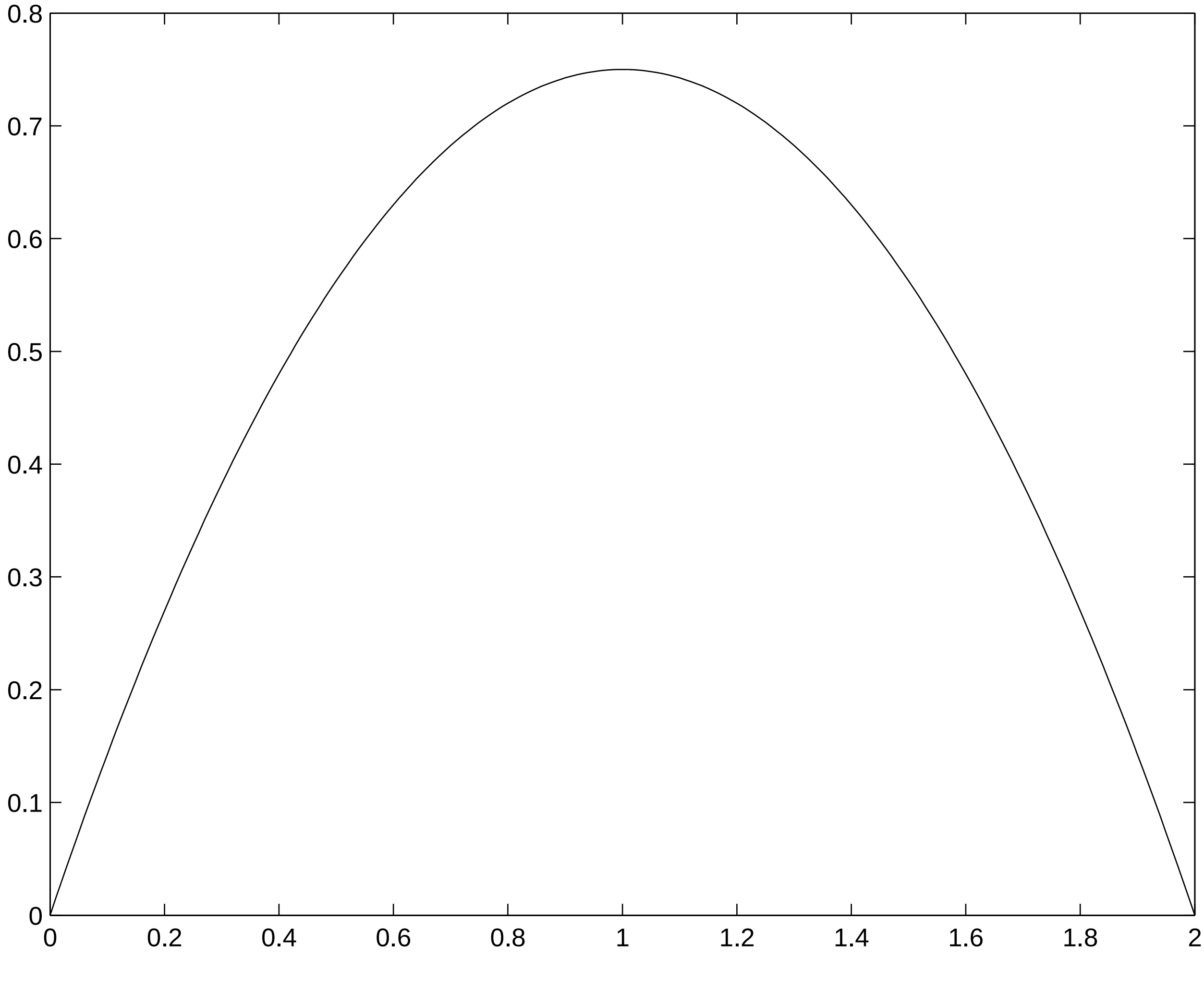
(ε) Έστω Z η τυχαία μεταβλητή που ισούται με το εβδομαδιαίο κέρδος. Τότε

$$Z = g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 640X, & X < C \\ 640C, & X > C \end{array} \right\}$$

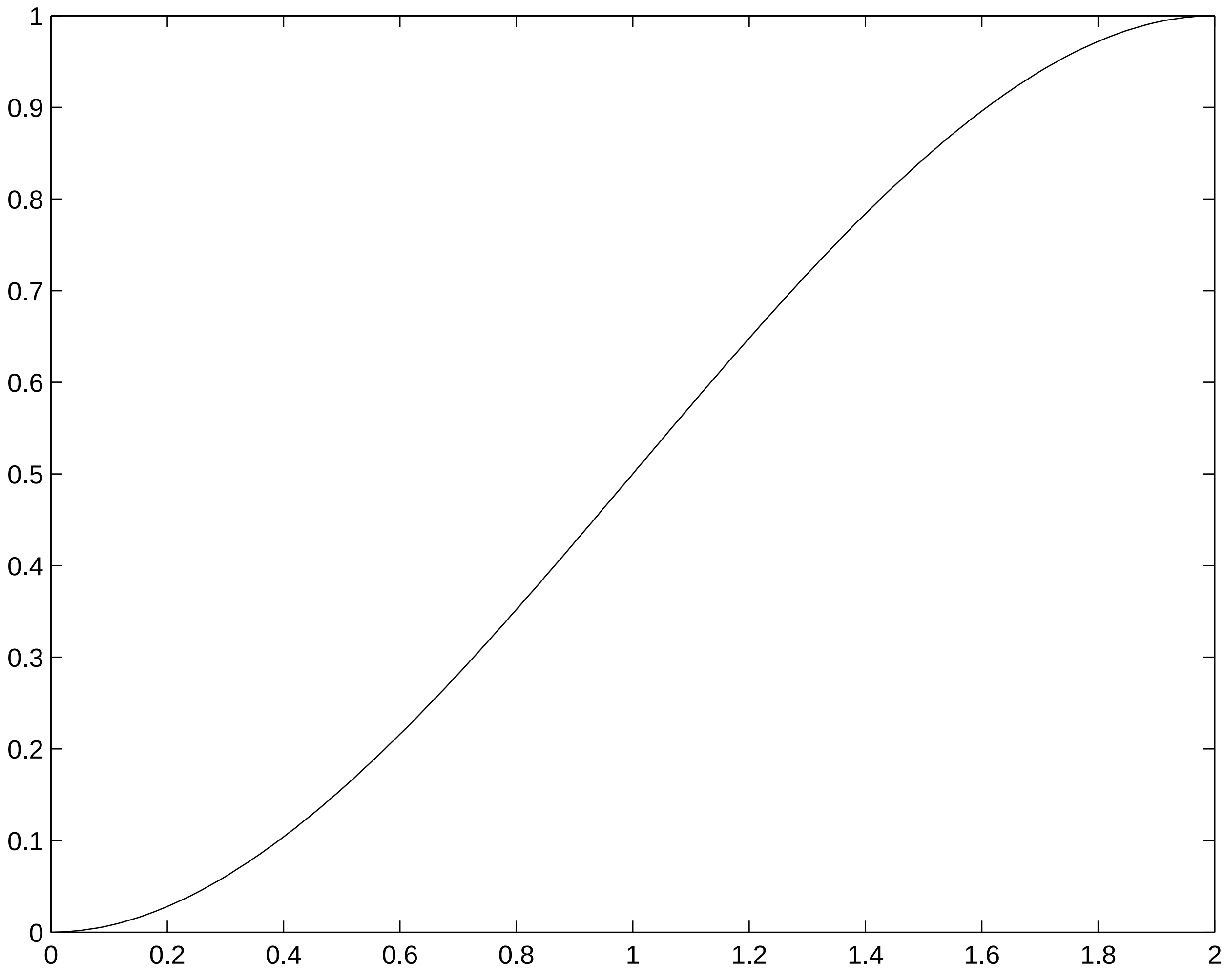
Η αναμενόμενη τιμή του κέρδους ως συνάρτηση της C είναι

$$\begin{aligned} E[Z] &= \int_0^2 g(x) f_X(x)dx \\ &= 640\{\frac{3}{4}\int_0^C x(2x-x^2)dx + \frac{3}{4}C\int_C^2 (2x-x^2)dx\} \\ &= 640(\frac{C^3}{2} - \frac{3C^4}{16} + C - \frac{3C^3}{4} + \frac{C^4}{4}) \\ &= 640(C - \frac{C^3}{4} + \frac{C^4}{16}) \end{aligned}$$

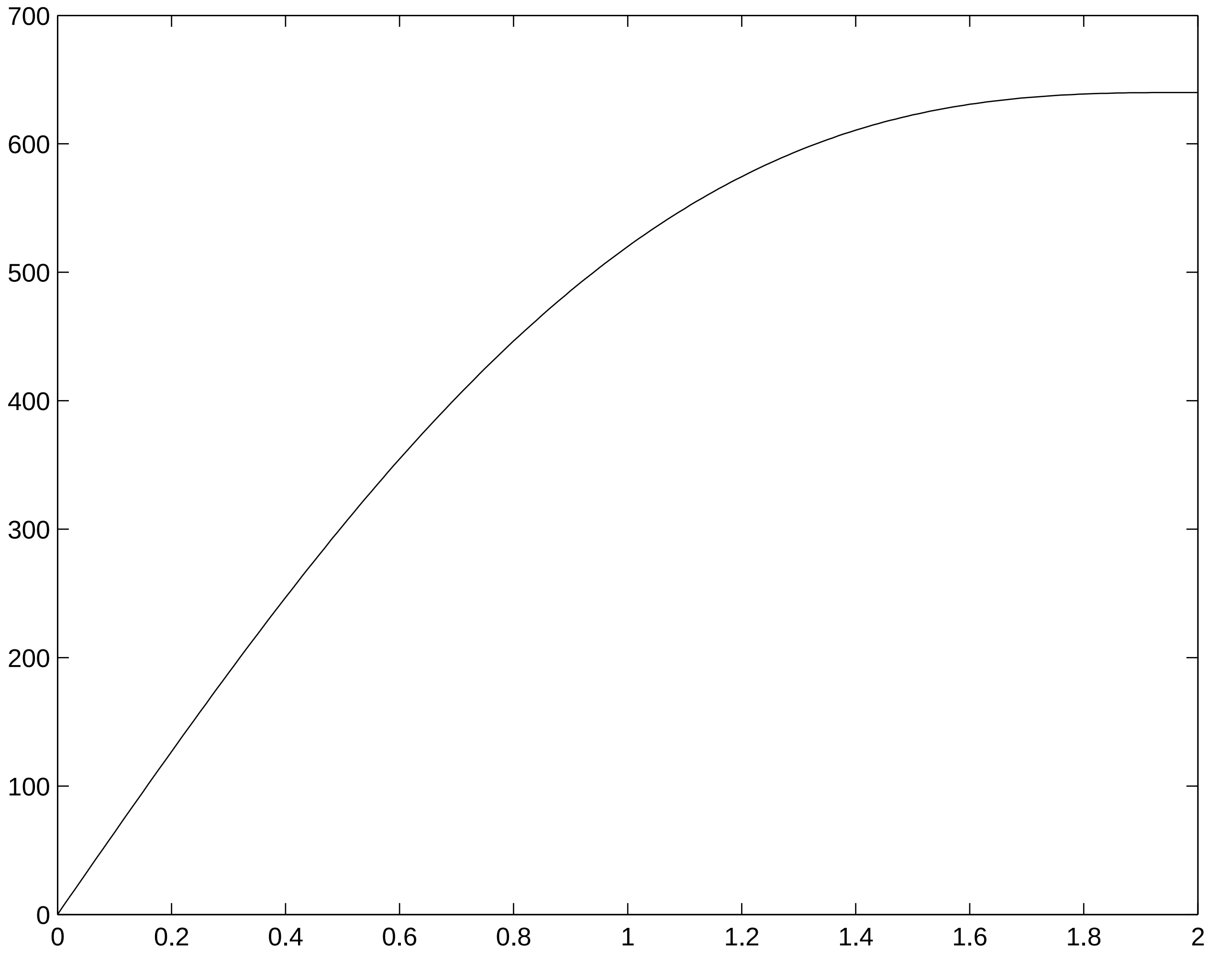
Το μέσο κέρδος συναρτήσει της χωρητικότητας φαίνεται σχηματικά στο σχήμα 3.



Σχήμα 1: η γραφική παράσταση της ς.π.π



Σχήμα 2: η πιθανότητα η ζήτηση να ικανοποιείται ως συνάρτηση της χωρητικότητας



Σχήμα 3: η γραφική παράσταση του μέσου κέρδους συναρτήσει της χωρητικότητας