ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2003
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 17/12/2003 Ημερομηνία Παράδοσης: 14/01/2004

Άσκηση 1. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) X, η οποία περιγράφει τη διάρκεια ζωής μιας ηλεκτρονικής συσκευής (μετρημένη σε ώρες), δίδεται από

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2} & \text{αν } x > 10 \\ 0 & \text{αν } x \leq 10 \end{cases}$$

(α) Βρείτε την πιθανότητα $P(X > 10)$.
(β) Ποια η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) της τ.μ. X;
(γ) Ποια η πιθανότητα ότι σε ένα πληθυσμό έξι τέτοιων συσκευών τουλάχιστον τρεις θα λειτουργήσουν για τουλάχιστον 15 ώρες; Τι υπόθεση κάνατε για να απαντήσετε σε αυτό το ερώτημα;

Άσκηση 2. Φτάνετε στη στάση στις 10 η ώρα, γνωρίζοντας ότι το λεωφορείο θα έρθει κάποια χρονική στιγμή ομοιόμορφα κατανεμημένη μεταξύ 10 και 10:30.
(α) Ποια η πιθανότητα ότι θα πρέπει να περιμένετε περισσότερο από 10 λεπτά για την άφιξη του λεωφορείου;
(β) Αν το λεωφορείο δεν έχει έρθει ακόμα στις 10:15, ποια η πιθανότητα ότι θα πρέπει να περιμένετε τουλάχιστον για 10 επιπλέον λεπτά;

Άσκηση 3. Η ετήσια βροχόπτωση (σε εκατοστά) σε κάποια γεωγραφική περιοχή έχει κανονική (Γκαουσιανή) κατανομή με μέση τιμή $\mu = 40$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 4$, δηλαδή $X \sim N(40, 4^2)$. Ποια η πιθανότητα ότι ξεκινώντας από φέτος, θα περάσουν τουλάχιστον 10 χρόνια έως ότου υπάρξει μια χρονιά όπου η βροχόπτωση θα ξεπεράσει τα 50 εκατοστά; Τι υπόθεση κάνατε;

Άσκηση 4. Ο Θανάσης υπολογίζει ότι ο συνολικός αριθμός των χιλιομέτρων τα οποία διανύει ένα αυτοκίνητο πριν αποσυρθεί είναι μία εκθετική τ.μ. με παράμετρο $1/200000$. Ο Κώστας πουλάει ένα αμάξι για το οποίο ισχυρίζεται ότι έχει διανύσει 100000 χιλιόμετρα. Αν ο Θανάσης το αγοράσει, ποια η πιθανότητα ότι θα μπορέσει να διανύσει 200000 πρόσθετα χιλιόμετρα με αυτό; Επαναλάβετε υποθέτοντας τώρα ότι ο συνολικός αριθμός των χιλιομέτρων τα οποία διανύει ένα αυτοκίνητο δεν είναι εκθετική αλλά ομοιόμορφη τ.μ. με πεδίο τιμών $(0,\ 400000)$.

Άσκηση 5. Η κατασκευαστική εταιρία στην οποία εργάζεστε παίρνει μέρος σε ένα μειοδοτικό διαγωνισμό για την ανάθεση κάποιου έργου. Υποθέτοντας ότι κερδίζετε το συμβόλαιο (έχοντας καταθέσει την μικρότερη τιμή), πληρώνετε μία άλλη εταιρία το ποσό των 100.000 ευρώ για να εκτελέσει το έργο. Αν πιστεύετε ότι η μέγιστη τιμή των αντιπάλων σας μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μία ομοιόμορφη τ.μ. στο διάστημα (70.000, 140.000), ποια πρέπει να είναι η προσφορά σας ώστε να μεγιστοποιήσετε το αναμενόμενο (μέσο) κέρδος σας και ποιο θα είναι αυτό;

Άσκηση 6. Έστω τρεις ανεξάρτητες τ.μ. A, B και C, οι οποίες είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα $(0,\ 1)$.
(α) Ποια είναι η από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής των A, B και C;
(β) Ποια η πιθανότητα ότι όλες οι ρίζες της εξίσωσης $Ax^2 + Bx + C = 0$ είναι πραγματικές;

Άσκηση 7. Η από κοινού σ.π.π. των τ.μ. X και Y είναι

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{αν } 0< x< 1,\ \ 0< y< 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Είναι οι X και Y ανεξάρτητες τ.μ.;
(β) Βρείτε την περιθωριακή σ.π.π. της X.
(γ) Βρείτε την πιθανότητα $P(X+Y< 1)$.

Άσκηση 8. Η από κοινού σ.π.π. των τ.μ. X και Y είναι

$$f_{X,Y}(x,y) = xe^{-x(y+1)} \quad x>0,\ \ y>0.$$

(α) Βρείτε τη δεσμευμένη σ.π.π. της X, δεδομένου του $Y=y$ και τη δεσμευμένη σ.π.π. της Y, δεδομένου του $X=x$.
(β) Βρείτε τη σ.π.π. της $Z=XY$.

Άσκηση 9. Ένας αριθμός επιλέγεται τυχαία (δηλαδή με ομοιόμορφη κατανομή) από το διάστημα $(0,\ 1)$. Ποια η πιθανότητα ότι
(α) το πρώτο δεκαδικό ψηφίο του είναι 1;
(β) το δεύτερο δεκαδικό ψηφίο του είναι 2;
(γ) το πρώτο δεκαδικό ψηφίο της τετραγωνικής του ρίζας είναι 3;

Άσκηση 10. Το πλάτος των βιδών που παράγονται σε κάποιο εργοστάσιο ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 0.9$ cm και τυπική απόκλιση $\sigma = 0.003$ cm, δηλαδή $X \sim N(0.9,\ 0.003^2)$.
(α) Αν οι τεχνικές προδιαγραφές των πελατών επιβάλουν το πλάτος των βιδών να είναι 0.9 ± 0.005 cm, (επομένως βίδες με πλάτος εκτός αυτών των ορίων να θεωρούνται ελαττωματικές) τι ποσοστό των βιδών που παράγονται από αυτό το εργοστάσιο είναι ελαττωματικές;
(β) Στόχος της εταιρίας είναι κατά μέσο όρο μόνο μία στις 100 βίδες να βγαίνει ελαττωματική. Ποια η μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή για την τυπική απόκλιση, σ, ώστε η εταιρία να πετυχαίνει το στόχο της;

Άσκηση 11. Έστω X μία τ.μ. που μοντελοποιεί την εβδομαδιαία ζήτηση βενζίνης (μετρημένη σε χιλιάδες γαλόνια - 1 γαλόνι=4.5 λίτρα) σε κάποιο βενζινάδικο του Ηρακλείου. Η σ.π.π. της X δίδεται από

$$f_X(x) = \frac{3}{4}[1-(1-x)^2], \quad 0 \le x \le 2.$$

Έστω C η χωρητικότητα (μετρημένη και αυτή σε χιλιάδες γαλόνια) της δεξαμενής καυσίμων του βενζινάδικου, η οποία γεμίζεται κάθε βδομάδα. Ο ιδιοκτήτης του βενζινάδικου ενδιαφέρεται για την τ.μ. Y, την συνολική ποσότητα βενζίνης (μετρημένη σε χιλιάδες γαλόνια) που πουλάει σε μία βδομάδα. Προφανώς η ποσότητα βενζίνης που πωλείται σε μία βδομάδα δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την χωρητικότητα της δεξαμενής, δηλαδή $Y \le C$. Υποθέστε ότι το κέρδος από κάθε γαλόνι που πωλείται είναι 0.64 ευρώ.
(α) Χρησιμοποιείστε κάποιο πρόγραμμα όπως το Matlab για να δώσετε την γραφική παράσταση της σ.π.π. στο διάστημα $[0,\ 2]$. Δείξτε ότι είναι μία έγκυρη σ.π.π.
(β) Έστω ότι $C=1$ και παρατηρείται ότι κάποια βδομάδα $X=1.105$. Μπορεί το βενζινάδικο να ικανοποιήσει τη ζήτηση;
(γ) Υπολογίστε και δώστε την γραφική παράσταση της πιθανότητας ότι η ζήτηση ικανοποιείται, ως συνάρτηση της χωρητικότητας, C. Ποια η πιθανότητα ότι η ζήτηση ικανοποιείται όταν $C=1$;
(δ) Ποια η ελάχιστη τιμή της C η οποία διασφαλίζει ότι η πιθανότητα η ζήτηση να υπερβαίνει την χωρητικότητα είναι το πολύ 0.1;
(ε) Δώστε την γραφική παράσταση του μέσου εβδομαδιαίου κέρδους, ως συνάρτηση της χωρητικότητας, C.