ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2003
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 26/11/2003 Ημερομηνία Παράδοσης: 03/12/2003

Άσκηση 1.(α) $\sum_{i=1}^{6} P(i) = 1 \Longrightarrow 3C + 6C = 1 \Longrightarrow C = 1/9$

(β) Έστω $p(i,j) = P(X = i, Y = j)$. Τότε,
$p(1,1) = P_4 + P_6 = 4/9, p(1,0) = P_2 = 2/9, p(0,1) = P_5 = 1/9, p(0,0) = P_1 + P_3 = 2/9$

(γ) 12 αριθμοί ανά δυο ίδιοι διατάσσονται με $\frac{12!}{2^6}$ τρόπους, αφού οι διατάξεις των 12 αριθμών είναι 12! και υπάρχουν 6 ομάδες των 2 που η μεταξύ τους εναλλαγή δεν γίνεται αισθητή, έτσι η πιθανότητα είναι:

$$P = \frac{(12)!}{2^6}(C)^6(2C)^6 = \frac{(12)!}{2^6}(1/9)^6(2/9)^6$$

(δ) Ομοίως διαιρούμε τις 12! διατάξεις των 12 ερχόμενων ζαριών με τις $(4!)^3$ επιλογές αν διατάξουμε τις 3 διαφορετικές ομάδες των τεσσάρων αριθμών(εφόσον δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία ήρθανε) και πολλαπλασιάζουμε με τις πιθανότητες για τις 4 ρίψεις: $(\frac{1}{9}\frac{2}{9})^4$. Έτσι συνολικά

$$P = \frac{(12)!}{(4!)^3}(1/3)^{12}$$

(ε) $\sum_{i=8}^{12} \binom{12}{i} (2/3)^i (1/3)^{12-i}$

Άσκηση 2.(α) Με $p_j = P(XYZ = j)$ έχουμε ότι $p_6 = p_2 = p_4 = p_{12} = 1/4$
Έτσι $E[XYZ] = (6 + 2 + 4 + 12)/4 = 6$

(β) Με $q_j = P(XY + XZ + YZ = j)$, έχουμε ότι
$q_{11} = q_5 = q_8 = q_{16} = 1/4$ Έτσι
$E[XY + XZ + YZ] = (11 + 5 + 8 + 16)/4 = 10$

Άσκηση 3. Εφόσον οι ρίψεις των ζαριών είναι ανεξάρτητες, η μέση τιμή του αθροίσματος των ρίψεων ισούται με το άθροισμα των μέσων τιμών τους και η διασπορά με το γινόμενο των διασπορών τους.Έτσι

(α) $E[\sum_{i=1}^{10} X_i] = \sum_{i=1}^{10} E[X_i] = 10(7/2) = 35$

(β) $Var(\sum_{i=1}^{10} X_i) = 10Var(X_1)$. Με

$$\begin{aligned} Var(X_1) &= E[X_1^2] - E[X_1]^2 \\ &= [1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36]/6 - 49/4 \\ &= 35/12 \end{aligned}$$

Άρα $Var(\sum_{i=1}^{10} X_i) = 350/12$

Άσκηση 4. Γενικά, $E[\alpha x] = \alpha * E[x]$, $\mu_{\alpha x} = \alpha\mu_x$
και $Var[\alpha x] = E[(\alpha x - \mu_{\alpha x})^2] = E[\alpha^2(x-\mu_x)^2] = \alpha^2 * Var(x)$. Έτσι

(α) $E[X^2+4X+4] = E[X^2]+4E[X]+4 = 14$

(β) $Var(4+3X) = Var(3X) = 9 * Var(X) = 45$

Άσκηση 5.(α) Αφού το γεγονός $X+\Upsilon = n$ μπορεί να γραφτεί ως ένωση 2 ξένων γεγονότων $X=k$, $\Upsilon = n-k$, $0 \leq k \leq n$, έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
P(X+\Upsilon=n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k, \Upsilon=n-k) \\
&= P(X=k)P(\Upsilon=n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n
\end{aligned}$$

δηλαδή η $X+\Upsilon$ ακολουθεί την Poisson κατανομή με παραμέτρους $\lambda_1+\lambda_2$.

(β)

$$\begin{aligned}
P(X=k|X+Y=n) &= \frac{P(X=k, X+Y=n)}{P(X+Y=n)} \\
&= \frac{P(X=k, Y=n-k)}{P(X+Y=n)} \\
&= \frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)}
\end{aligned}$$

δεδομένου ότι οι μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες. Από το ερώτημα (α) έχουμε

$$\begin{aligned}
P(X=k|X+Y=n) &= \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k}{k!}\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}[\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}]^{-1} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n} \\
&= \binom{n}{k}(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^k(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^{n-k}
\end{aligned}$$

Άρα η δεσμευμένη κατανομή της X , δοθέντος ότι $X+Y=n$, είναι η διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$.

Άσκηση 6.(α) Έστω X,Y οι αριθμοί των ανδρών και των γυναικών αντίστοιχα που μπαίνουν στην τράπεζα. Θα δείξουμε την ανεξαρτησία των 2 μεταβλητών. Για να έχουμε μια έκφραση της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, δεσμεύουμε στην $X+Y$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} P(X=i, Y=j) &= P(X=i, Y=j|X+Y=i+j)P(X+Y=i+j) \\ &+ P(X=i, Y=j|X+Y\neq i+j)P(X+Y\neq i+j) \end{aligned}$$

που είναι μια απλή περίπτωση του τύπου $P(E)=P(E|F)P(F)+P(E|F^c)P(F^c)$.
Εφόσον $P(X=i, Y=j|X+Y\neq i+j)=0$ προφανώς, έχουμε

$$P(X=i, Y=j)=P(X=i, Y=j|X+Y=i+j)P(X+Y=i+j)$$

Τώρα, εφόσον $X+Y$ είναι ο συνολικός αριθμός των ατόμων που εισέρχονται στην τράπεζα, έπεται ότι

$$P(X+Y=i+j)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}$$

Επίσης, δεδομένου ότι $i+j$ άτομα μπαίνουν στην τράπεζα και αφού κάθε άτομο που μπαίνει είναι με πιθανότητα p άνδρας, έπεται ότι η πιθανότητα ότι ακριβώς i από αυτούς είναι άνδρες (και έτσι j γυναίκες) είναι απλώς η διωνυμική πιθανότητα $\binom{i+j}{i}p^i(1-p)^j$. Άρα,

$$P(X=i, Y=j|X+Y=i+j)=\binom{i+j}{i}p^i(1-p)^j$$

και

$$\begin{aligned} P(X=i, Y=j) &= \binom{i+j}{i}p^i(1-p)^j e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda p}{i!j!}[\lambda(1-p)]^j \\ &= \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^i}{i!}e^{-\lambda(1-p)}\frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!} \end{aligned}$$

Έτσι

$$P(X=i)=\frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^i}{i!}\sum_j e^{-\lambda(1-p)}\frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!}=\frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^i}{i!}$$

και ομοίως

$$P(Y=j)=\frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^i}{i!}$$

(β) Από το ερώτημα (α) και με $\lambda=10$ και $p=1/2$ έχουμε

$$\begin{aligned} P(X\leq 3) &= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) \\ &= e^{-10(1/2)}\frac{\big(10(1/2)\big)^0}{0!}+e^{-10(1/2)}\frac{\big(10(1/2)\big)^1}{1!}+e^{-10(1/2)}\frac{\big(10(1/2)\big)^2}{2!}+e^{-10(1/2)}\frac{\big(10(1/2)\big)^3}{3!} \\ &= e^{-5}+5e^{-5}+\frac{5^2}{2!}e^{-5}+\frac{5^3}{3!}e^{-5} \end{aligned}$$