

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2003
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 26/11/2003

Ημερομηνία Παράδοσης: 03/12/2003

Άσκηση 1. Η ρίψη ενός άδικου εξαέδρου ζαριού φέρνει περιττό αριθμό (1, 3, 5) με πιθανότητα C και ζυγό αριθμό (2, 4, 6) με πιθανότητα $2C$.

(α) Βρείτε τη σταθερά C .

(β) Έστω ότι ρίχνουμε το ζάρι μία φορά. Η τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X ισούται με 1 αν το αποτέλεσμα είναι ζυγός ενώ ισούται με 0 αν το αποτέλεσμα είναι περιττός. Επίσης, η τ.μ. Y ισούται με 1 αν το αποτέλεσμα είναι αριθμός μεγαλύτερος από 3, διαφορετικά ισούται με 0. Βρείτε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) των τ.μ. X και Y .

Έστω τώρα ότι ρίχνουμε το ζάρι διαδοχικά 12 φορές.

(γ) Βρείτε την πιθανότητα ότι καθένας από τους 6 αριθμούς έρχεται ακριβώς από δύο φορές.

(δ) Βρείτε την πιθανότητα ότι 4 ρίψεις φέρνουν αποτέλεσμα είτε ένα είτε δύο, 4 ρίψεις φέρνουν είτε τρία είτε τέσσερα και 4 ρίψεις φέρνουν είτε πέντε είτε έξι.

(ε) Βρείτε την πιθανότητα ότι τουλάχιστον 8 από τις ρίψεις φέρνουν ζυγό αριθμό.

Βοήθεια: Για τα υποερωτήματα (γ)-(δ), σκεφτείτε πολωνυμική και διωνυμική κατανομή...

Άσκηση 2. Η από κοινού σ.π. των τ.μ. X , Y και Z είναι:

$$p(1, 2, 3) = p(2, 1, 1) = p(2, 2, 1) = p(2, 3, 2) = \frac{1}{4}.$$

Βρείτε τις μέσες τιμές (α) $E[XYZ]$ και (β) $E[XY + XZ + YZ]$.

Άσκηση 3. Ένα δίκαιο εξαέδρο ζάρι ρίχνεται 10 φορές. (α) Υπολογίστε τη μέση τιμή του αθροίσματος των αποτελεσμάτων των 10 ρίψεων. (β) Υπολογίστε τη διασπορά του αθροίσματος των αποτελεσμάτων των 10 ρίψεων.

Άσκηση 4. Αν $E[X] = 1$ και $\text{var}(X) = 5$, βρείτε (α) $E[(2 + X)^2]$ και (β) $\text{var}(4 + 3X)$.

Άσκηση 5. (α) Έστω X και Y ανεξάρτητες Poisson τ.μ. με παραμέτρους λ_1 και λ_2 , αντίστοιχα. Δείξτε ότι το άθροισμά τους $Z = X + Y$ είναι επίσης Poisson τ.μ. με παράμετρο $\lambda_1 + \lambda_2$.

(β) Έστω X και Y ανεξάρτητες Poisson τ.μ. με παραμέτρους λ_1 και λ_2 , αντίστοιχα. Δείξτε ότι η έκφραση της δεσμευμένης σ.π. της τ.μ. X δεδομένου ότι $X + Y = n$ είναι ίδια με αυτή της διωνυμικής σ.π. με παραμέτρους $(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2})$.

Άσκηση 6. (α) Έστω ότι ο αριθμός των ατόμων που επισκέπτονται μία τράπεζα κατά τη διάρκεια μιας μέρας είναι Poisson τ.μ. με παράμετρο λ . Δείξτε ότι αν κάθε άτομο που μπαίνει στην τράπεζα είναι άντρας με πιθανότητα p και γυναίκα με πιθανότητα $1 - p$, τότε οι αριθμοί των αντρών (X) και των γυναικών (Y) που μπαίνουν στην τράπεζα είναι ανεξάρτητες Poisson τ.μ. με παραμέτρους λp και $\lambda(1 - p)$, αντίστοιχα.

Βοήθεια: Εκφράστε την από κοινού σ.π. των τ.μ. X και Y ως

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i, Y = j / X + Y = i + j)P(X + Y = i + j)$$

(β) Ο αριθμός των ατόμων που μπαίνουν σε ένα φαρμακείο κατά τη διάρκεια μίας ώρας είναι Poisson τ.μ. με παράμετρο $\lambda = 10$. Υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι το πολύ 3 άντρες μπήκαν στο φαρμακείο, δεδομένου ότι 10 γυναίκες το επισκέφτηκαν κατά την ίδια ώρα.