ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2003
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 19/11/2003 Ημερομηνία Παράδοσης: 26/11/2003

Άσκηση 1. Έστω A_i το γεγονός να επιλεχθεί άσπρη μπάλα την i-οστή φορά, M_i το γεγονός να επιλεχθεί μάυρη μπάλα την i-οστή φορά (i = 0,1) και K_i το γεγονός να επιλεχθεί κόκκινη μπάλα την i-οστή φορά. Τότε, $P(A_0) = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}, P(M_0) = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}, P(K_0) = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}, P(A_1|A_0) = \frac{7}{13}, P(A_1|M_0) = \frac{8}{13}, P(A_1|K_0) = \frac{8}{13}, P(M_1|A_0) = \frac{4}{13}, P(M_1|M_0) = \frac{3}{13}, P(M_1|K_0) = \frac{4}{13}, P(K_1|A_0) = \frac{2}{13}, P(K_1|M_0) = \frac{2}{13}, P(K_1|K_0) = \frac{1}{13}$
Η τυχαία μεταβλητή X παίρνει τις ακόλουθες τιμές με τις ακόλουθες πιθανότητες:
X = 0 με $P(X=0) = P(K_0) * P(K_1|K_0) = \frac{1}{7} * \frac{1}{13}$
X = 1 με $P(X=1) = P(A_0) * P(M_1|A_0) + P(M_0) * P(A_1|M_0) = \frac{4}{7} * \frac{4}{13} + \frac{2}{7} * \frac{8}{13}$
X = 2 με $P(X=2) = P(M_0) * P(K_1|M_0) + P(K_0) * P(M_1|K_0) = \frac{2}{7} * \frac{2}{13} + \frac{1}{7} * \frac{4}{13}$
X = 4 με $(X=4) = P(M_0) * P(M_1|M_0) = \frac{2}{7} * \frac{3}{13}$
X = -1 με $P(X=-1) = P(A_0) * P(K_1|A_0) + P(K_0) * P(A_1|K_0) = \frac{4}{7} * \frac{2}{13} + \frac{1}{7} * \frac{8}{13}$
X = -2 με $P(X=-2) = P(A_0) * P(A_1|A_0) = \frac{4}{7} * \frac{7}{13}$

Άσκηση 2. (α) Ο αριθμός των εβδομάδων που η επένδυση σας διπλασιάζεται είναι μια δυωνυμική τυχαία μεταβλητή Y με παραμέτρους (5,1/2). Αφού η επένδυση υποδιπλασιάζεται κατά τις υπόλοιπες 5 - Y εβδομάδες και κάθε υποδιπλασιασμός ακυρώνει έναν διπλασιασμό, έχουμε ότι $X = 32 * 2^Y * 2^{-(5-Y)} = 32 * 2^{2Y-5}$. Οι πιθανές τιμές της X είναι 1, 4, 16, 64, 256 και 1024 , που αντιστοιχούν στις $Y = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

(β) $P(X=1) = P(Y=0) = 1/32$
$P(X=4) = P(Y=1) = 5/32$
$P(X=64) = P(Y=3) = 10/32$
$P(X=256) = P(Y=4) = 5/32$
$P(X=1024) = P(Y=5) = 1/32$

(γ) $E[X] = \sum X * P(X) = 1 * (1/32) + 4 * (5/32) + 16 * (10/32) + 64 * (10/32) + 256 * (5/32) + 1024 * (1/32) = 97.65625$
Άρα η τηλεοπτική διαφήμιση υποτιμά κατά λίγο την απόδοση.

(δ) $P(X < 32) = P(X=1) + P(X=4) + P(X=16) = 1/2$

(ε) Υπάρχει 50% πιθανότητα για κάποιον να χάσει τα λεφτά του με αυτήν την επένδυση. Εφόσον οι πιθανότητες απώλειας των χρημάτων είναι σημαντικές, αλλά και τα κέρδη που μπορεί να αποφέρει η επένδυση είναι υψηλά, εξαρτάται από το πόσο σημαντικό είναι για τον καθένα το αρχικό ποσό που θέλει να διαθέσει. Σε κάθε περίπτωση αν διαθέσει κάποιο μικρό αρχικό ποσό, η επένδυση θεωρείται αρκετά επικερδής με χαμηλό κόστος.

Άσκηση 3. $P(X \text{είναι άρτιος ακέραιος}) = P(X=0) + P(X=2) + ... + P(X=M)$ όπου $M = N$ αν N άρτιος και $M = N-1$ αν N περιττός. Άρα, $P(X \text{είναι άρτιος ακέραιος}) = q^N + \binom{N}{2} q^{N-2} p^2 + ... + \binom{N}{M} q^{N-M} p^M$. Σημειώστε ότι ο τελευταίος όρος είναι p^N αν ο N άρτιος και Nqp^{N-1} αν N περιττός. Τώρα, $(q+p)^N = q^N + \binom{N}{1} q^{N-1} p + \binom{N}{2} q^{N-2} p^2 + ... + \binom{N}{N-1} qp^{N-1} + p^N$ ενώ $(q-p)^N = q^N - \binom{N}{1} q^{N-1} p + \binom{N}{2} q^{N-2} p^2 - ... + (-1)^{N-1} \binom{N}{N-1} qp^{N-1} + (-1)^N p^N$.
Προσθέτουμε τις παραπάνω εξισώσεις παρατηρώντας ότι κάποιοι όροι αλληλοεξουδετερώνονται. Επίσης, αν ο N είναι περιττός, οι τελευταίοι όροι ακυρώνονται, ενώ αν είναι άρτιος, οι όροι πριν τον τελευταίο ακυρώνονται. Σε κάθε περίπτωση, βλέπουμε ότι το άθροισμα είναι απλώς $2P(X \text{είναι άρτιος ακέραιος})$ έτσι $P(X \text{είναι άρτιος ακέραιος}) = [(q+p)^N + (q-p)^N]/2 = [1 + (1-2p)^N]/2$ αφού $q = 1-p$

Άσκηση 4. $Y = 1, 2, 3$ άνθρωποι μένουν πίσω ανάλογα με $X = 6, 7, 8$. Αφού η X παίρνει την τιμή 6 με πιθανότητα $\frac{\binom{8}{6}}{2^8} = \frac{28}{256}$, την τιμή 7 με πιθανότητα $\frac{\binom{8}{7}}{2^8} = \frac{8}{256}$ και την τιμή 8 με πιθανότητα $\frac{\binom{8}{8}}{2^8} = \frac{1}{256}$, βρίσκουμε ότι $E[Y] = \frac{1*28+2*8+3*1}{256} = \frac{47}{256}$

Άσκηση 5. (α) Η X παίρνει τις τιμές -6,6,12,18.

(β) Αν στοιχηματίσεις 6 Ευρώ στο i, τότε χάνεις αν και τα τρία ζάρια δείξουν ένα από τους 5 διαφορετικούς από το i αριθμούς. Έτσι $P(X=-6) = 5^3/6^3 = \frac{125}{216}$. Αντίθετα, κερδίζεις 6 Ευρώ αν ένα από τα ζάρια έρθει i και τα άλλα 2 όχι $P(X=6) = 3*(1*5^2)/6^3 = \frac{75}{216}$. Ομοίως, $P(X=12) = 3*(1^2*5)/6^3 = \frac{15}{216}$ και $P(X=18) = 1^3/6^3 = \frac{1}{216}$
Έλεγχος ορθότητας: $125 + 75 + 15 + 1 = 216$

(γ) $E[X] = \sum x * p(x) = \frac{125*(-6)+75*(6)+15*12+1*18}{216} = -\frac{102}{216} = -\frac{17}{36}$

(δ) Η πιθανότητα τα 3 ζάρια να δείξουν διαφορετικούς αριθμούς είναι $\frac{6*5*4}{216} = \frac{5}{9}$. Σε αυτήν την περίπτωση κερδίζεις 3 Ευρώ από τους αριθμούς που ήρθανε και χάνεις άλλα τόσα από τους υπόλοιπους. Άρα είσαι στο μηδέν. Η πιθανότητα και τα 3 ζάρια να δείξουν τον ίδιο αριθμό είναι $6*\frac{1}{216} = \frac{1}{36}$, στην περίπτωση αυτή κερδίζεις 3 Ευρώ από τον αριθμό που ήρθε και χάνεις άλλα 5 από τους υπόλοιπους αριθμούς. Άρα σε αυτήν την περίπτωση χάνεις 2 Ευρώ. Η πιθανότητα 2 αριθμοί να είναι ίδιοι είναι $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$, στην περίπτωση αυτή κερδίζεις 2 Ευρώ από το ζευγάρι και 1 από το μοναδικό, αλλά χάνεις 4 Ευρώ από τα υπόλοιπα που δεν έκατσαν. Άρα συνολικά, χάνεις 1 Ευρώ. Έτσι, η Y είναι μια τυχαία μεταβλητή που παίρνει τις τιμές 0,-1,-2 με πιθανότητες που βρέθηκαν παραπάνω. Η αναμενόμενη τιμή της είναι: $E[Y] = \frac{0*20-1*15-2*1}{36} = -\frac{17}{36}$. Άρα παρέμεινε η ίδια απώλεια.

Άσκηση 6. (α)

$$\begin{aligned}
P(X \leq 100) &= 1 - P(X > 100) \\
&= 1 - [P(X = 105) + P(X = 104) + P(X = 103) + P(X = 102) + P(X = 101)] \\
&= 1 - \big[(0.9)^{105} + \binom{105}{1}(0.9)^{104}(0.1) + \binom{105}{2}(0.9)^{103}(0.1)^2 \\
&+ \binom{105}{3}(0.9)^{102}(0.1)^3 + \binom{105}{4}(0.9)^{101}(0.1)^4\big] \\
&= 0.983283
\end{aligned}$$

(β) Αν η X είναι τυχαία δυωνυμική κατανομή με παραμέτρους (n,p), τότε η Y=n-X θα είναι δυωνυμική με παραμέτρους (n,1-p). Έτσι ο αριθμός των μη-εμφανίσεων είναι δυωνυμική τυχαία κατανομή με παραμέτρους (105,0.1). Εφόσον το n είναι μεγάλο και το p μικρό, είναι λογικό να να τον προσεγγίσουμε με κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = np = 10.5$.

(γ)

$$\begin{aligned}
P(Y \geq 5) &= 1 - P(Y < 5) \\
&= 1 - \big[P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4)\big] \\
&= 1 - e^{(-10.5)[1+(10.5)+(10.5)^2/2+(10.5)^3/6(10.5)^4/24]} \\
&= 0.978906
\end{aligned}$$

που είναι πολύ κοντά με την πιθανότητα που βρήκαμε στο ερώτημα (α).

Άσκηση 7. (α) Ένα πακέτο λαμβάνεται σωστά αν και μόνο αν και τα n bits ματαδίδονται σωστά, το οποίο έχει πιθανότητα $(1-p)^n = Q$. Σε περίπτωση λαθών, επαναμετάδοση μπορεί να συμβεί μέχρι 5 φορές. Έτσι, P(πακέτο χάθηκε) $= P$(5 ανεπιτυχείς μεταδόσεις) $= (1-Q)^5$ και P(επιτυχής μετάδοση πακέτου) $= 1-(1-Q)^5$.

(β) X_i παίρνει τις τιμές 1,2,3,4,5 με πιθανότητες $Q, (1-Q)Q, (1-Q)^2Q, (1-Q)^3Q, (1-Q)^4$ αντίστοιχα. Παρατηρείστε ότι αν και οι 4 πρώτες πιθανότητες συνιστούν γεωμετρική σειρά,η $P(X=5)$ δεν είναι η πιθανότητα μια γεωμετρικής τυχαίας μεταβλητής όταν αυτή λάβει την τιμή 5. Αν οι 4 πρώτες μεταδόσεις δε ληφθούν σωστά, τότε η X κλιμακώνεται στην τιμή 5, και $P(X=5) = P$(γεωμετρική τυχαία μεταβλητή $>4) = (1-Q)^4$

(γ)

$$
\begin{aligned}
E[X_i] &= 1*Q+2*(1-Q)*Q+3*(1-Q)^2Q+4*(1-Q)^3Q+5*(1-Q)^4 \\
&= Q*[1+(1-Q)+(1-Q)^2+(1-Q)^3]+(1-Q)^4 \\
&+ Q*[(1-Q)+(1-Q)^2+(1-Q)^3]+(1-Q)^4 \\
&+ Q*[(1-Q)^2+(1-Q)^3]+(1-Q)^4 \\
&+ Q*[(1-Q)^3]+(1-Q)^4 \\
&+ (1-Q)^4 \\
&= Q*\frac{1-(1-Q)^4}{1-(1-Q)}+(1-Q)^4+Q*(1-Q)*\frac{1-(1-Q)^3}{1-(1-Q)}+(1-Q)^4 \\
&+ Q*(1-Q)^2*\frac{1-(1-Q)^2}{1-(1-Q)}+(1-Q)^4+Q*(1-Q)^3+(1-Q)^4 \\
&= 1+(1-Q)+(1-Q)^2+(1-Q)^3+(1-Q)^4 = \frac{1-(1-Q)^5}{1-(1-Q)} = \frac{1-(1-Q)^5}{Q} \\
&= \frac{1-(1-5Q+10Q^2-10Q^3+5Q^4-Q^5)}{Q} = 5-10Q+10Q^2-5Q^3+Q^4
\end{aligned}
$$

(δ) P(όλα τα πακέτα να ληφθούν επιτυχώς) $= [1-(1-Q)^5]^L$. Προσέξτε ότι η απάντηση δεν είναι Q^L, που είναι η πιθανότητα όλα τα πακέτα να ληφθούν σωστά με την πρώτη μετάδοση.