

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2003
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 19/11/2003

Ημερομηνία Παράδοσης: 26/11/2003

Άσκηση 1. Δύο μπάλες επιλέγονται τυχαία από ένα κουτί το οποίο περιέχει 8 άσπρες, 4 μαύρες και 2 κόκκινες. Έστω ότι κερδίζουμε 2 ευρώ για κάθε μαύρη μπάλα που επιλέγουμε και χάνουμε 1 ευρώ για κάθε άσπρη μπάλα που επιλέγουμε. Περιγράψτε πλήρως την τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X που συμβολίζει τα κέρδη μας. Δηλαδή, βρείτε το πεδίο τιμών της καθώς και τη συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) $p_X(x)$.

Άσκηση 2. Το διαφημιστικό φυλλάδιο της GoDotCom Inc., μιας εταιρίας διαχείρισης κεφαλαίων υποστηρίζει ότι μπορεί να διπλασιάσει την επένδυση των πελατών της σε μία εβδομάδα μέσω εμπορίας μετοχών νέας τεχνολογίας. Οι διαφημίσεις της στην τηλεόραση διακηρύσσουν ότι "κατά μέσο όρο οι πελάτες μας τριπλασιάζουν τα λεφτά τους σε 5 εβδομάδες!" Αποφασίζετε να επενδύσετε 32 ευρώ μέσω της GoDotCom Inc. για μία περίοδο 5 εβδομάδων. Έστω X η αξία της επένδυσής σας στο τέλος αυτής της περιόδου.

Τώρα, υποθέτουμε ότι η GoDotCom Inc. σε μία εβδομάδα διπλασιάζει την επένδυσή σας με πιθανότητα $1/2$ και χάνει το 50% της επένδυσής σας με πιθανότητα $1/2$. Δηλαδή, αν επενδύσετε C ευρώ, τότε μία εβδομάδα μετά θα έχετε είτε $2C$ είτε $C/2$ ευρώ με την ίδια πιθανότητα. Υποθέτουμε ακόμα ότι η απόδοση κάθε εβδομάδας αποτελεί μία ανεξάρτητη δοκιμή η οποία είτε διπλασιάζει είτε μειώνει στο μισό την επένδυση που είχατε στην αρχή της εβδομάδας.

- (α) Ποιο το πεδίο τιμών της τ.μ. X ;
- (β) Ποια η σ.π. της τ.μ. X ;
- (γ) Ποια η μέση τιμή της τ.μ. X ; Είναι η διαφήμιση της GoDotCom Inc. ακριβής;
- (δ) Ποια η πιθανότητα ότι θα χάσετε λεφτά επενδύοντας με την GoDotCom Inc.; Δηλαδή βρείτε την $P(X < 32)$.
- (ε) Μία επένδυση 32.000 ευρώ με την GoDotCom Inc. μπορεί να αξίζει 1.000 ευρώ σε 5 εβδομάδες! Έστω ότι είχατε αυτά τα χρήματα. Θα αποφασίζατε να τα επενδύσετε με την GoDotCom Inc.; Γιατί ναι ή γιατί όχι;

Άσκηση 3. Έστω X διωνυμική τ.μ. με παραμέτρους (n, p) . Ποια η πιθανότητα να είναι η X ζυγός ακέραιος αριθμός; (το 0 είναι ζυγός!)

Βοήθεια: Βρείτε την έκφραση για το άθροισμα των διωνύμων $(x + y)^N + (x - y)^N$ για να δείξετε ότι $P(X \text{ ζυγός}) = [1 + (1 - 2p)^N]/2$.

Άσκηση 4. Οχτώ άνθρωποι έχουν κράτηση για να ταξιδέψουν με ένα ταξί 5 θέσεων από τα Χανιά στο Ηράκλειο. Ο αριθμός των ανθρώπων που εμφανίζονται για να ταξιδέψουν μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια διωνυμική τ.μ. X με παραμέτρους $(8, \frac{1}{2})$. Αν εμφανιστούν πάνω από 5 επιβάτες, οι πρώτοι 5 ταξιδεύουν και οι υπόλοιποι μένουν πίσω. Ποιος ο μέσος αριθμός επιβατών που μένουν πίσω;

Άσκηση 5. Σε κάποιο παιχνίδι τύχης, ο παίκτης ποντάρει ένα ποσό χρημάτων σε έναν από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6. Τρία δίκαια εξαέδρα ζάρια ρίχνονται (ώστε ο δειγματοχώρος έχει $6^3 = 216$ ισοπίθανα αποτελέσματα). Αν ο αριθμός που επέλεξε ο παίκτης εμφανιστεί σε ένα, δύο ή τρία από τα ζάρια, τότε ο παίκτης κερδίζει αντίστοιχα μία, δύο ή τρεις φορές το ποσό που πόνταρε. Προφανώς το αρχικό στοίχημα επιστρέφεται επίσης στον παίκτη. Αν ο αριθμός που επέλεξε ο παίκτης δεν εμφανιστεί σε κανένα από τα τρία ζάρια, τότε ο παίκτης χάνει το ποσό του στοιχήματος. Έστω X μία τ.μ. που συμβολίζει το ποσό των χρημάτων που κερδίζει ένα στοίχημα 6 ευρώ (αρνητικές τιμές για την X δηλώνουν ζημία).

- (α) Ποιο είναι το πεδίο τιμών της τ.μ. X ;
- (β) Ποια η σ.π. της τ.μ. X ;
- (γ) Ποια η μέση τιμή της τ.μ. X ;
- (δ) Ένας παίκτης μοιράζει το αρχικό ποσό των 6 ευρώ σε 6 ποσά του ενός ευρώ τα οποία ποντάρει σε κάθε αριθμό από το 1 μέχρι το 6 σκεπτόμενος ότι τουλάχιστον ένας και πιθανόν 2 ή και 3 από τους αριθμούς που πόνταρε θα εμφανιστούν. Έστω Y τα λεφτά που κερδίζει με αυτή τη στρατηγική. Ποιες τιμές παίρνει η Y ; Ποια η μέση τιμή των κερδών τώρα; Συγκρίνετε με τη μέση τιμή της X .

Άσκηση 6. Έστω ότι 105 επιβάτες έχουν κράτηση για να ταξιδέψουν με ένα αεροπλάνο 100 θέσεων από το Ηράκλειο στην Θεσσαλονίκη. Ο αριθμός των επιβατών που εμφανίζονται για να ταξιδέψουν μπορεί να μοντελοποιηθεί ως μια διωνυμική τ.μ. X με παραμέτρους $(105, 0.9)$.

- (α) Βρείτε την πιθανότητα ότι όλοι οι επιβάτες που εμφανίζονται βρίσκουν θέση, δηλαδή βρείτε την πιθανότητα $P(X \leq 100)$.
- (β) Εξηγήστε γιατί ο αριθμός των μη-εμφανισθέντων επιβατών μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν μία Poisson τ.μ. Y και υπολογίστε την παράμετρο λ .
- (γ) Υπολογίστε και πάλι την πιθανότητα ότι όλοι οι επιβάτες που εμφανίζονται βρίσκουν θέση, με βάση το μοντέλο Poisson, δηλαδή βρείτε την πιθανότητα $P(Y \geq 5)$, και συγκρίνετε με την απάντησή σας στο υποερώτημα (α).

Άσκηση 7. Σε συστήματα τηλεπικοινωνιακών δικτύων, ένα μήνυμα διαιρείται σε L πακέτα. Κάθε πακέτο αποτελείται από N bits τα οποία συμπεριλαμβάνουν την επικεφαλίδα, την διεύθυνση, τον Cyclic Redundancy Check (CRC) κώδικα ελέγχου λαθών, την πληροφορία, την ουρά, σημαίες, κτλ. Το πακέτο μεταδίδεται μέσω του καναλιού και η πιθανότητα λάθους μετάδοσης για κάθε bit είναι ίση με p . Αν ο CRC κώδικας ανιχνεύσει ότι το πακέτο έχει ληφθεί με σφάλμα έστω και σε ένα από τα N bits, η μετάδοση του πακέτου επαναλαμβάνεται. Αλλά, αν το ίδιο πακέτο μεταδοθεί συνολικά 5 φορές και δεν έχει ληφθεί σωστά ακόμα και στην πέμπτη προσπάθεια, τότε θεωρείται χαμένο.

- (α) Βάσει του παραπάνω μηχανισμού επαναμετάδοσης, ποια η πιθανότητα ότι τελικά ένα πακέτο λαμβάνεται σωστά; Βρείτε πρώτα την πιθανότητα Q ότι και τα N bits ενός πακέτου λαμβάνονται σωστά και εκφράστε την ζητούμενη πιθανότητα σαν μία συνάρτηση του Q .
- (β) Έστω X_i ο αριθμός των μεταδόσεων του i -στού πακέτου μέσα από το κανάλι. Περιγράψτε πλήρως την τ.μ. X_i (πεδίο τιμών και σ.π.).
- (γ) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός μεταδόσεων του i -στού πακέτου, δηλαδή ποιο το $E[X]$;
- (δ) Ποια η πιθανότητα ότι και τα L πακέτα λαμβάνονται επιτυχώς, δηλαδή ποια η πιθανότητα σωστής λήψης όλου του μηνύματος;