

ΗΥ-217 Λύσεις Έκτης σειράς ασκήσεων

13 Ιανουαρίου 2003

1 Άσκηση

(α)

$$\begin{aligned} E\{Yg(X)|X\} &= \sum_y yg(X)p_{Y|X}(y|x) \\ &= g(X) \sum_y yp_{Y|X}(y|x) \\ &= g(X)E\{Y|X\} \end{aligned}$$

(β) Δείχνουμε ότι

$$E\{E\{Y|X, Z\}|X\} = E\{Y|X\} = E\{E\{Y|X\}|X, Z\}.$$

Αφού

$$E\{Y|X, Z\} = \sum_y yp(Y = y|X = x, Z = z)$$

έχουμε,

$$\begin{aligned} E\{E\{Y|X, Z\}|X\} &= \sum_z \sum_y yp(Y = y|X = x, Z = z)p(X = x, Z = z|X = x) \\ &= \sum_z \sum_y y \frac{p(Y = y, X = x, Z = z)}{p(X = x, Z = z)} \cdot \frac{p(X = x, Z = z)}{p(X = x)} \\ &= \sum_z \sum_y y \frac{p(Y = y, X = x, Z = z)}{p(X = x)} \\ &= \sum_y y \frac{p(Y = y, X = x)}{p(X = x)} \\ &= E\{Y|X\} \end{aligned}$$

Από το (α), αν θέσουμε $g(X) = E\{Y|X\}$ και $E\{1|Z\} = 1$ παίρνουμε,

$$\begin{aligned} g(X)E\{1|Z\} &= E\{g(X)|X, Z\} \\ E\{E\{Y|X\}|X, Z\}. \end{aligned}$$

2 Άσκηση

(α) Ο μετασχηματισμός του $p_X(k) = \frac{(1-p)^k}{k \ln(1/p)}$ είναι,

$$\begin{aligned} M_X(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e^s k)(1-p)^k}{k \ln(1/p)} \\ &= \frac{1}{\ln(1/p)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e^s(1-p))^k}{k} \\ &= \frac{\ln(1 - e^s(1-p))}{\ln p} \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι

$$-\ln(1-a) = a + \frac{a^2}{2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k}$$

για $-1 < a \leq 1$.

(β) Ο μετασχηματισμός μιας τ.μ. Poisson $p_N(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ δίνεται από

$$M_N(s) = E\{e^{sN}\} = e^{\lambda(e^s-1)}.$$

Ο μετασχηματισμός της Y είναι,

$$\begin{aligned} M_Y(s) &= E\{e^{sY}\} = E\{E\{e^{sY}|N\}\} \\ &= E\{E\{e^{s \sum_{i=1}^N X_i}|N\}\} \\ &= E\{M_X(s)^N\} \\ &= M_N(s)|_{e^s=M_X(s)} \\ &= e^{\lambda(e^s-1)}|_{e^s=M_X(s)} \\ &= e^{\lambda(\frac{\ln(1-e^s(1-p))}{\ln p}-1)} \\ &= e^{-\frac{\lambda}{\ln p}(-\ln(1-e^s(1-p))+\ln p)} \\ &= [e^{(-\ln(1-e^s(1-p))+\ln p)}]^{-\frac{\lambda}{\ln p}} \\ &= [e^{-\ln(1-e^s(1-p))} \cdot e^{\ln p}]^{-\frac{\lambda}{\ln p}} \\ &= \left[\frac{p}{1-e^s(1-p)}\right]^{-\frac{\lambda}{\ln p}} \end{aligned}$$

3 Άσκηση

Αφού X και Y είναι ανεξάρτητες και $R = X + Y$ ισχύει ότι $M_R(s) = M_X(s)M_Y(s)$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των γεννητριών συναρτήσεων

έχουμε,

$$\begin{aligned}
E\{R\} &= \left[\frac{d}{ds} M_R(s) \right]_{s=0} \\
&= \left[\left(\frac{d}{ds} M_X(s) \right) M_Y(s) + \left(\frac{d}{ds} M_Y(s) \right) M_X(s) \right]_{s=0} \\
&= \left[\left(\frac{d}{ds} M_X(s) \right) M_Y(s) \right]_{s=0} + \left[\left(\frac{d}{ds} M_Y(s) \right) M_X(s) \right]_{s=0}
\end{aligned}$$

επίσης για κάθε τιμ. V , $[M_V(s)]_{s=0} = 1$. Έτσι,

$$\begin{aligned}
E\{R\} &= \left[\frac{d}{ds} M_X(s) \right]_{s=0} (1) + \left[\frac{d}{ds} M_Y(s) \right]_{s=0} (1) \\
&= E\{X\} + E\{Y\}
\end{aligned}$$

(β) Για τον υπολογισμό της $Var(R)$ έχουμε,

$$\begin{aligned}
E\{R^2\} &= \left[\frac{d^2 M_R(s)}{ds^2} \right]_{s=0} \\
&= \left[\frac{d}{ds} \left(M_Y(s) \frac{d}{ds} M_X(s) + M_X(s) \frac{d}{ds} M_Y(s) \right) \right]_{s=0} \\
&= \left[M_Y(s) \frac{d^2}{ds^2} M_X(s) + \frac{d}{ds} M_X(s) \frac{d}{ds} M_Y(s) + M_X(s) \frac{d^2}{ds^2} M_Y(s) + \frac{d}{ds} M_Y(s) \frac{d}{ds} M_X(s) \right]_{s=0} \\
&= \left[M_Y(s) \frac{d^2}{ds^2} M_X(s) + M_X(s) \frac{d^2}{ds^2} M_Y(s) + 2 \frac{d}{ds} M_X(s) \frac{d}{ds} M_Y(s) \right]_{s=0} \\
&= E\{X^2\} + E\{Y^2\} + 2E\{X\}E\{Y\}.
\end{aligned}$$

(αφού $[M_X(s)]_{s=0} = [M_Y(s)]_{s=0} = 1$.) Επομένως,

$$\begin{aligned}
Var(R) &= E\{R^2\} - (E\{R\})^2 \\
&= (E\{X^2\} + E\{Y^2\} + 2E\{X\}E\{Y\}) - (E\{X\} + E\{Y\})^2 \\
&= E\{X^2\} + E\{Y^2\} + 2E\{X\}E\{Y\} - (E\{X\}^2 + 2E\{X\}E\{Y\} + E\{Y\}^2) \\
&= (E\{X^2\} - E\{X\}^2) + (E\{Y^2\} - E\{Y\}^2) \\
&= Var(X) + Var(Y).
\end{aligned}$$

4 Άσκηση

(α) Τα a, b προσδιορίζονται λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{aligned}
M_X(0) &= \alpha e^0 + b e^{6(e^0-1)} = 1 \Rightarrow \alpha + b = 1 \\
E[X] &= 3 = \alpha e^0 + 6b e^0 e^{6(e^0-1)} \Rightarrow \alpha + 6b = 3.
\end{aligned}$$

Από αυτό προκύπτει, $\alpha = \frac{3}{5}$, $b = \frac{2}{5}$.

(β) Η X είναι μια μη-αρνητική διακριτή τ.μ. οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον εξής τύπο :

$$\frac{d^n}{d(e^s)^n} M_X(s) \Big|_{e^s=0} = n! \cdot p_X(n).$$

Πράγματι για μια μη-αρνητική τ.μ. X έχουμε,

$$M_X(s) = E[e^{sX}] = p_X(0) \cdot e^{0s} + p_X(1) \cdot e^{1s} + p_X(2) \cdot e^{2s} + \dots$$

οπότε,

$$\begin{aligned} M_X(s) \Big|_{e^s=0} &= p_X(0), \\ \frac{d}{de^s} M_X(s) \Big|_{e^s=0} &= (p_X(1) \cdot 1 + 2p_X(2)e^s + \dots) \Big|_{e^s=0} = p_X(1), \\ \frac{d^2}{d(e^s)^2} M_X(s) \Big|_{e^s=0} &= (2!p_X(2) + 3!p_X(3)e^s + \dots) \Big|_{e^s=0} = 2!p_X(2), \dots \end{aligned}$$

άρα,

$$\begin{aligned} P(X=1) = p_X(1) &= \frac{1}{1!} (\alpha e^s + b e^{6(e^s-1)})' \Big|_{e^s=0} = (\alpha + 6b e^{6(e^s-1)})' \Big|_{e^s=0} = \\ &= \alpha + 6b e^{-6} = \frac{3}{5} + 6 \cdot \frac{2}{5} \cdot e^{-6} = 0.606. \end{aligned}$$

(γ)

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \frac{d^2}{ds^2} M_X(s) \Big|_{s=0} = (\alpha e^s + 6b(e^s e^{6(e^s-1)} + e^s 6e^s e^{6(e^s-1)})) \Big|_{s=0} \\ &= \alpha + 42 \cdot b = \frac{87}{5}. \end{aligned}$$

(δ)

$$E[e^{3X}] = M_X(s) \Big|_{s=3} = \alpha e^3 + b e^{6(e^3-1)} = \frac{3}{5} e^3 + \frac{2}{5} e^{6(e^3-1)} = 2.16 \times 10^{49}.$$

(ε) Αφού η X είναι διακριτή ισχύει,

$$P(X+Y=2) = P(X=2, Y=0) + P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=1).$$

Από ανεξαρτησία των X και Y (οι οποίες έχουν την ίδια pdf) παίρνουμε,

$$\begin{aligned} P(X+Y=2) &= P(X=2)P(Y=0) + P(X=0)P(Y=2) + P(X=1)P(Y=1) \\ &= 2p_X(0)p_X(2) + [p_X(1)]^2. \end{aligned}$$

όπου οι $p_X(0)$, $p_X(1)$, $p_X(2)$ υπολογίζονται μέσω του τύπου στο (β) :

$$\begin{aligned} p_X(0) &= M_X(s) \Big|_{e^s=0} = be^{-6}, \\ p_X(1) &= \frac{d}{de^s} M_X(s) \Big|_{e^s=0} = \alpha + 6be^{-6}, \\ p_X(2) &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d(e^s)^2} M_X(s) \Big|_{e^s=0} = \frac{1}{2!} (36 \cdot be^{6(e^s-1)}) \Big|_{e^s=0} = \\ &= \frac{1}{2!} 36be^{-6} = 18be^{-6}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} P(X+Y=2) &= 2 \cdot (be^{-6})(18be^{-6}) + (\alpha + 6be^{-6})^2 = \\ &= \left(36\left(\frac{2}{5}\right)^2 e^{-12}\right) + \left(\frac{3}{5} + 6\frac{2}{5}e^{-6}\right)^2 = 0.367. \end{aligned}$$

5 Άσκηση

Αν $U = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N$, τότε $Var(X_1 + X_2 + \dots + X_N) = Var(Y)$.
Ξέρουμε ότι $Var(Y) = E\{Y^2\} - E\{Y\}^2$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των γεννητριών συναρτήσεων έχουμε,

$$\begin{aligned} M_Y(s) &= E\{E\{e^{sY}|N\}\} \\ &= E\{M_{Y|N}(s)\} \\ E\{Y\} &= E\left[\frac{dM_{Y|N}(s)}{ds}\right] \Big|_{s=0} \\ &= E\left[\frac{d[M_X(s)]^N}{ds}\right] \Big|_{s=0} \\ &= E\left[N[M_X(s)]^{N-1} \frac{d[M_X(s)]}{ds}\right] \Big|_{s=0} \\ &= E[NE[X]] \\ &= E[N]E[X] \\ E\{Y^2\} &= E\left[\frac{d^2 M_{Y|N}(s)}{ds^2}\right] \Big|_{s=0} \\ &= E\left[N(N-1)[M_X(s)]^{N-2} \left(\frac{d[M_X(s)]}{ds}\right)^2 + N[M_X(s)]^{N-1} \frac{d^2[M_X(s)]}{ds^2}\right] \Big|_{s=0} \\ &= E[(N-1)NE[X]^2 + NE[X^2]] \\ &= E[N^2]E[X]^2 - E[N]E[X]^2 + E[N]E[X^2]. \end{aligned}$$