

ΗΥ-217 Έκτη σειρά ασκήσεων

19 Δεκεμβρίου 2002

Ημερομηνία παράδοσης 10-01-03
ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1 Άσκηση

Έστω X, Y, Z τρεις διακριτές τυχαίες μεταβλητές. Δείξτε ότι :

(α) αν $g(x)$ συνάρτηση τότε,

$$E\{Y g(X)|X\} = g(X)E\{Y|X\}$$

(β)

$$E\{E\{Y|X, Z\}|X\} = E\{Y|X\} = E\{E\{Y|X\}|X, Z\}.$$

2 Άσκηση

Έστω $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητες και με την ίδια κατανομή (i.i.d.:independent identically distributed) τυχαίες μεταβλητές, όπου κάθε X_i έχει λογαριθμική συνάρτηση πυκνότητας με παράμετρο p ,

$$p_{X_i}(k) = \frac{(1-p)^k}{k \ln(1/p)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

όπου $0 < p < 1$. Έστω N διακριτή τ.μ. με κατανομή Poisson με παράμετρο λ ,

$$p_N(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

όπου $\lambda > 0$.

(α) βρείτε το μετασχηματισμό $M_X(s)$ των τ.μ. X_i .

(Υπόδειξη : μπορείτε να κάνετε χρήση της ταυτότητας: για $-1 < \alpha \leq 1$,

$$\ln(1 + \alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} + \dots)$$

(β) Ορίζοντας $Y = \sum_{i=1}^N X_i$, βρείτε το μετασχηματισμό $M_Y(s)$.

3 Άσκηση

Έστω X, Y ανεξάρτητες τ.μ. με συναρτήσεις πυκνότητας των οποίων οι μετασχηματισμοί είναι $M_X(s)$ και $M_Y(s)$. Ορίζουμε τ.μ. R τ.ώ. $R = X + Y$. Χρησιμοποιώντας την $M_R(s)$ και τις ιδιότητες των γεννητριών συναρτήσεων δείξτε ότι :

(α) $E\{R\} = E\{X\} + E\{Y\}$

(β) $Var\{R\} = Var\{X\} + Var\{Y\}$.

4 Άσκηση

Έστω X τ.μ. με μετασχηματισμό $M_X(s) = ae^s + be^{6(e^s-1)}$ και μέση τιμή $E\{X\} = 3$. Υπολογίστε τα παρακάτω :

(α) Τις σταθερές a και b .

(β) $P(X = 1)$.

(γ) $E\{X^2\}$.

(δ) $E\{e^{3X}\}$.

(ε) $P(X + Y = 2)$, όπου Y είναι τ.μ. ανεξάρτητη της X αλλά με την ίδια κατανομή.

5 Άσκηση

Έστω $N, X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητες τ.μ., όπου η N παίρνει μη-αρνητικές ακέραιες τιμές και οι X_i ακολουθούν την ίδια κατανομή. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των γεννητριών συναρτήσεων δείξτε ότι :

$$Var\{X_1 + \dots + X_N\} = Var\{X\}E\{N\} + (E\{X\})^2 Var\{N\}.$$

(είναι η 5(iii) του φυλ. 4 αλλά προσέξτε με ποιο τρόπο πρέπει να λυθεί τώρα...

Υπόδ.: για να αρχίσετε από κάπου : $M_Y(s) = E\{E\{e^{sY}|N\}\} = E\{M_{Y|N}(s)\}$.)

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

6 Ασκήση

Δειγματοληπτούμε το σήμα εξόδου ενός μικροφώνου και θεωρούμε τις μετρήσεις μας ως πειραματικές τιμές μιας Γκαουσιανής τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) X με μηδενική μέση τιμή ($\mu_X = 0$) και τυπική απόκλιση ίση με 5 Volts ($\sigma_X = 5$). Η έξοδος του μικροφώνου τροφοδοτείται σε ένα ενισχυτή. Για την αποφυγή της υπερφόρτωσης του ενισχυτή, χρησιμοποιούμε ένα κύκλωμα αποκοπής (clipping circuit):

$$Y = c(X) = \begin{cases} X, & |X| \leq 10 \\ -10, & X < -10 \\ 10, & X > 10 \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε θεωρητικά τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (ΣΠΠ) της τ.μ. Y .

(β) Γράψτε ένα απλό πρόγραμμα (σε MATLAB) για να δημιουργήσετε $N = 10^3$ πειραματικές τιμές των τ.μ. X και Y . Χρησιμοποιείστε τη συνάρτηση `randn()` της MATLAB για τη δημιουργία των τιμών της τ.μ. X . Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `hist()` της MATLAB δώστε τη γραφική παράσταση της προσέγγισης της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. Y (το λεγόμενο και *ιστόγραμμα* της Y) και συγκρίνετέ την με την ακριβή γραφική παράσταση της ΣΠΠ της Y που έχετε υπολογίσει στο (α).

(γ) Επαναλάβετε το βήμα (β) για $N = 10^5$. Τι παρατηρείτε στην προσέγγιση της ΣΠΠ της Y .

Υπόδειξη: Ένα MATLAB primer μπορείτε να βρείτε στην διεύθυνση:

<http://www.glue.umd.edu/~nsw/ench250/primer.htm>.

Για την γραφική παράσταση του ιστογράμματος, χρησιμοποιείστε τις ακόλουθες εντολές:

```
miny = min(y);
maxy = max(y);
NumBins = 51;
h = hist(y,NumBins);
for k=1:NumBins,
    bincenters(k) = miny + ((maxy-miny)/NumBins)*(k-1/2);
```

```

end
h = h / sum(h); % normalize PDF estimate
plot(bincenters,h);
legend('Histogram PDF estimate');

```

7 Ασκήση

Θέλουμε να δημιουργήσουμε μια εκθετική τ.μ. Y , αλλά διαθέτουμε μόνο μια γεννήτρια ομοιόμορφων τ.μ. ορισμένων στο διάστημα $[0, 1]$. Π.χ. στο MATLAB, μια τέτοια γεννήτρια είναι η συνάρτηση `rand()`.

(α) Έστω λοιπόν X μια ομοιόμορφη τ.μ. στο διάστημα $[0, 1]$. Δείξτε αναλυτικά ότι η νέα τ.μ. $Y = -(1/a) \ln(X)$ είναι εκθετικά κατανοημένη με μέση τιμή $1/a$.

(β) Δημιουργείστε $N = 10^3$ πειραματικές τιμές της εκθετικής τ.μ. Y με παράμετρο $a = 0,5$. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `hist()` της MATLAB, δώστε τη γραφική παράσταση της προσέγγισης της ΣΠΠ της τ.μ. Y και συγκρίνετέ την με την ακριβή γραφική παράσταση της ΣΠΠ της Y . Επαναλάβετε για $N = 10^5$.