Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τ.Ε.Υ.
ΗΥ217 Λύσεις 5ης Σειράς Ασκήσεων

1. Ασκηση 1 (Signal Classification)...

   (a) Ενα λάθος συμβαίνει όταν:

   - Το σύστημα συμπεραίνει 0 ή 1, ενώ στάλθηκε -1.
   - Το σύστημα συμπεραίνει -1 ή 1, ενώ στάλθηκε 0.
   - Το σύστημα συμπεραίνει -1 ή 0, ενώ στάλθηκε 1.

   Επομένως, η πιθανότητα λάθους, P(e), είναι :

$$\begin{aligned} P(e) &= P(X=-1)P(Y \geq -\frac{1}{2}|X=-1) + P(X=0)P(Y < -\frac{1}{2} \textbf{ OR } Y > \frac{1}{2}|X=0) \\ &+ P(X=1)P(Y \leq \frac{1}{2}|X=1) \\ &= \frac{1}{3}P(N \geq \frac{1}{2}) + \frac{1}{3}P(N < -\frac{1}{2} \textbf{ OR } N > \frac{1}{2}) + \frac{1}{3}P(N \leq -\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

   Λόγω συμμετρίας της κανονικής κατανομής

$$P(N \geq \frac{1}{2}) = P(N \leq -\frac{1}{2})$$

   Καθώς η N είναι γκαουσσιανή τυχαία μεταβλητή, μπορούμε να υπολγίσουμε την $P(N \geq n)$ χρησιμοποιώντας την Φ συνάρτηση,
   Επομένως

$$\begin{aligned} P(e) &= \frac{4}{3}P(N \geq \frac{1}{2}) \\ &= \frac{4}{3}(1 - \Phi(\frac{1}{2}\frac{1}{2})) \\ &= 0.535 \end{aligned}$$

   (b) Ομοίως,

$$\begin{aligned} P(e) &= P(X=-2)P(Y \geq -\frac{1}{2}|X=-2) + P(X=0)P(Y < -\frac{1}{2} \textbf{ OR } Y > \frac{1}{2}|X=0) \\ &+ P(X=2)P(Y \leq \frac{1}{2}|X=2) \\ &= \frac{1}{3}P(N \geq \frac{3}{2}) + \frac{1}{3}P(N < -\frac{1}{2} \textbf{ OR } N > \frac{1}{2}) + \frac{1}{3}P(N \leq -\frac{3}{2}) \end{aligned}$$

   Μετά από πράξεις

$$\begin{aligned} P(e) &= \frac{2}{3}(1 - \Phi(\frac{3}{4})) + \frac{2}{3}(1 - \Phi(\frac{1}{4})) \\ &= 0.418 \end{aligned}$$

   Παρατηρούμε λοιπόν ότι η πιθανότητα λάθους στη δεύτερη περίπτωση μειώθηκε λόγω της μεγαλύτερης απόστασης των συμβόλων.

2. Ασκηση 2

Αφού η X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1$,

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{if } x \geq 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(a) Εστω A το γεγονός ότι $Q \geq 2$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της δεσμευμένης ς.π.π,

$$f_{X|A}(x|X \geq 2) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{P(X \geq 2)}, & \text{if } x \geq 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Πρώτον, υπολογίζουμε την $P(X \in A)$. Ολοκληρώνοντας την ς.π.π της X στην περιοχή A,

$$\int_A f_X(x)dx = \int_2^{\infty} e^{-x}dx = -e|_2^{\infty} = -(0 - e^{-2}) = \frac{1}{e^2}$$

Κατά συνέπεια

$$f_{X|A}(x|X \geq 2) = \begin{cases} e^{2-x}, & \text{if } x \geq 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Παρά το ότι δεσμεύσαμε στο γεγονός $X > 2$ η ς.π.π εξακολουθεί να είναι εκθετική με παράμετρο λ. Αυτό εξηγείται από την ιδιότητα αμνησίας της εκθετικής τυχαίας μεταβλητής. Για παράδειγμα, αν χρησιμοποιούσαμε την κατανομή αυτή για να μοντελοποιήσουμε τον χρόνο που περνά μέχρι να συμβεί ένα γεγονός, ακόμα και αν περιμέναμε T χρονικές μονάδες, η πιθανότητα του να συμβεί το γεγονός εξακολουθεί να χει την ίδια κατανομή, δηλαδή δεν υπάρχει μνήμη για το αν συνέβη το γεγονός τις πρώτες T χρονικές στιγμές ή όχι.

(b) Τώρα πρέπει να υπολογίσουμε την από κοινού ς.π.π των x,y. Στην εκφώνηση αναφέρεται ότι δοθέντος $x = X$, Y είναι μια εκθετικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\lambda_Y = x$. Ετσι,

$$f_{Y|X}(y|X = x) = \begin{cases} xe^{-xy}, & \text{if } x, y \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των δεσμευμένων PDFs,

$$f_{Y|X}(y|X = x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

και άρα

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X}(y|X = x)f_X(x).$$

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω PDFs έχουμε

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)}, & \text{if } x, y \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(c) Για να βρούμε την περιθωριακή PDF της Υ, ολοκληρώνουμε την από κοινού PDF των Χ και Υ πάνω σε όλα τα χ. Ετσι,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_x f_X, Y(x,y)dx = \int_0^\infty xe^{-x(y+1)}dx \\ &= \frac{-x}{y+1}e^{-x(y+1)}\Big|_0^\infty + \frac{1}{y+1}\int_0^\infty e^{-x(y+1)}dx \\ &= \frac{-1}{(y+1)^2}e^{-x(y+1)}\Big|_0^\infty = \frac{1}{(y+1)^2} \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ολοκλήρωση κατά μέλη, θέτοντας u=x, du=dx, $du = e^{-x(y+1)}dx$, $v = \frac{-1}{y+1}e^{-x(y+1)}$. Επομένως, η περιθωριακή ς.π.π της Υ είναι

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{(y+1)^2}, & \text{if } y \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

3. Ασκηση 3

(a) Ας κοιτάξουμε το παρακάτω παράδειγμα για να ελέγξουμε την ανεξαρτησία.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^\infty f_X, Y(x,y)dy \\ &= \int_0^x cdy \\ &= cx \text{ , for } 0 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

Ομοίως,

$$f_Y(y) = \int_y^2 cdx = c(2-y) \text{ for } 0 \leq x \leq 1$$

Προφανώς

$$f_{X|Y}(x|y=1) \neq f_X(x)$$

Επομένως, οι Χ και Υ δεν είναι ανεξάρτητες.

(b) Ο όγκος κάτω από την ς.π.π πρέπει να ισούται με 1.

$$Volume = cx\frac{2x2}{2} = 2c = 1$$

Αρα $c = \frac{1}{2}$

(c) Στο σχήμα που παρατίθεται στο τέλος του αρχείου οι όγκοι 1 και 2 αντιστοιχούν στο γεγονός B, και οι όγκοι 2 και 3 ατο A.
Τότε,

$$P(B|A) = P(A \cap B)/P(A) = \frac{Volume2}{Volume2 + Volume3} = \frac{1}{16}\frac{16}{15} = \frac{1}{15}$$

(d)

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^2\int_y^2 xy\frac{1}{2}dxdy = \int_0^2 \frac{1}{4}y(4-y^2)dy = 1$$

4. Ασκηση 4

(a) Για να βρούμε την κατανομή της R, πρώτα υπολογίζουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής CDF.
Παρατηρείστε ότι αν το r είναι αρνητικό, $F_R(r) = 0$.Διαφορετικά,

$$\begin{aligned}
F_R(r) &= P(\sqrt{X^2+Y^2} \leq r) \\
&= P(X^2+Y^2) \leq r^2 \\
&= \int\int_{\text{circle of radius r}} \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dxdy \\
&= \int\int_{\text{circle of radius r}} \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}ududθ \\
&= \int_0^r\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}ududθ \\
&= \int_0^r \frac{u}{\sigma^2}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}du \\
&= [e^-\frac{u^2}{2\sigma^2}]_r^0 \\
&= 1 - [e^-\frac{r^2}{2\sigma^2}] \text{ for } r \geq 0
\end{aligned}$$

και επομένως,

$$f_R(r) = \frac{dF_R(r)}{dr} = \frac{r}{\sigma^2}[e^-\frac{r^2}{2\sigma^2}] \text{ for } r \geq 0$$

(b) Η ροπογεννήτρια μπορεί να υπολογιστεί με 2 τρόπους. Είτε απευθείας από την κατανομή της R,
είτε μέσω των κατανομών των X,Υ. Θα χρησιμοποιήσουμε την κατανομή της R.

$$\begin{aligned}
M_R(s) &= E[e^sR] = \int_0^\infty e^{sr}\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}dr \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty re^{-(\frac{r^2}{2\sigma^2}-sr)}dr \\
&= \frac{1}{\sigma^2}e^{\frac{s^2\sigma^2}{2}}\int_0^\infty re^{-(\frac{r}{\sigma\sqrt{2}}-\frac{s\sigma}{\sqrt{2}})^2}dr
\end{aligned}$$

Τώρα θέτοντας $\alpha = 1/\sigma\sqrt{2}$ και $\beta = s\sigma/\sqrt{2}$. Εχουμε:

$$\begin{aligned}
M_R(s) &= 2\alpha^2 e^{\beta^2} \int_0^\infty r e^{-(\alpha r-\beta)^2} dr \\
&= 2e^{\beta^2} \int_0^\infty r e^{-(r-\beta)^2} dr \\
&= 2e^{\beta^2} \big(\int_{-\beta}^\infty (r-\beta) e^{-(r-\beta)^2} d(r-\beta) + \beta \int_{-\beta}^\infty e^{-(r-\beta)^2} d(r-\beta) \big) \\
&= 2e^{\beta^2} \big(\int_{-\beta}^\infty r e^{-r^2} dr + \beta \int_{-\beta}^\infty e^{-r^2} dr \big)
\end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα δίνει:

$$\int_{-\beta}^\infty r e^{-r^2} dr = \int_\beta^\infty r e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} \int_{\beta^2}^\infty e^{-r} dr = \frac{-e^{\beta^2}}{2}$$

και το δεύτερο δίνει:

$$2\pi \int_{-\beta\sqrt{2}}^\infty \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} d(\frac{r}{\sqrt{2}}) = \pi\sqrt(2)\Phi(\beta\sqrt(2))$$

Ετσι τελικά

$$M_R(s) = 1 + 2\pi\sqrt{2}\beta e^{\beta^2}\Phi(\beta\sqrt{2}) = 1 + 2\pi s\sigma e^{\frac{s^2\sigma^2}{2}}\Phi(s\sigma)$$

5. Ασκηση 5

   (a) Βρίσκουμε την CDF της Υ και εν συνεχεία παραγωγίζουμε.

$$\begin{aligned}
F_R(r) &= P(\sqrt{X^2+Y^2} \leq r) \\
P(Y \leq y) &= P(\alpha X^2 + b \leq y) \\
&= P(\mid X \mid \leq \sqrt{\frac{y-b}{\alpha}}) \\
&= \int_{-\sqrt{\frac{y-b}{\alpha}}}^{\sqrt{\frac{y-b}{\alpha}}} f_X(x) dx \\
&= F_X(\sqrt{\frac{y-b}{\alpha}}) - F_X(-\sqrt{\frac{y-b}{\alpha}})
\end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{d}{dy}(F_X(\sqrt{\frac{y-b}{\alpha}}) - (\sqrt{-\frac{y-b}{\alpha}})) \\
&= \frac{f_X(\sqrt{\frac{y-b}{\alpha}}) + f_X(-\sqrt{\frac{y-b}{\alpha}}))}{2\alpha\sqrt{\frac{y-b}{\alpha}}}, \text{b} \leq y \leq \infty
\end{aligned}$$

(b) Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα και θέτοντας $\alpha = 1$ και $b = 0$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2\sigma^2}}}{2\sqrt{y}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}},\ 0 \le y \le \infty
\end{aligned}
$$

Η ροπογεννήτρια ορίζεται ως $E[e^{sY}] = E[e^s X^2]$.Είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε την $E[e^s X^2]$.
Χρησιμοποιώντας ότι το ολοκλήρωμα της γκαουσσιανής από το $-\infty$ ως το ∞ είναι 0, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
E[e^s X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^s x^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\frac{1}{2\sigma^2} - s)x^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{x^2}{2(\frac{\sigma^2}{1-2s\sigma^2})}\right) dx} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - 2s\sigma^2}}
\end{aligned}
$$

6. Ασκηση 6

(a) Η CDF της Z είναι:

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \le z) = P(e^{3x} \le z) = P(X \le \frac{\log z}{3}) \\
&= \int_0^{\frac{\log z}{3}} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{\log z/3} \\
&= 1 - e^{-\frac{\log z}{3}} = 1 - z^{-\frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$

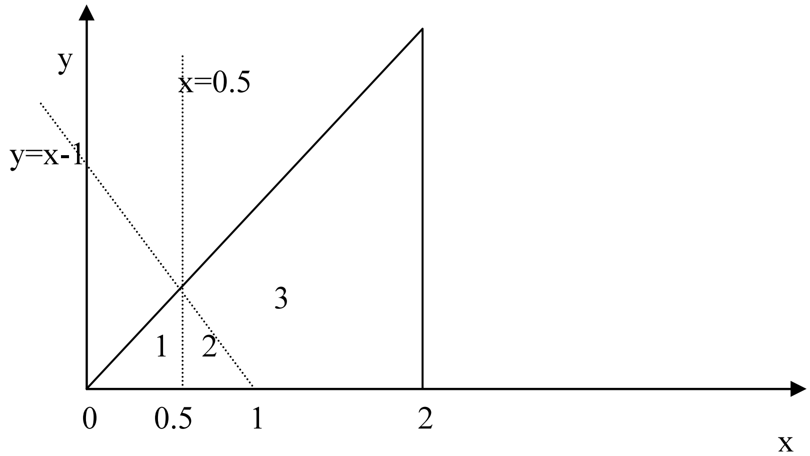
και η PDF

$$
f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{1}{3} z^{-\frac{4}{3}} \text{ for } 0 \le z < 1
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \le z) = P(Y/X \le z) = P(Y \le zX) \\
&= \int_0^2 \int_0^{zx} f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_0^2 \int_0^{zx} c(x,y) dx dy = \int_0^2 czx dx \\
&= \frac{czx^2}{2}\Big|_0^2
\end{aligned}
$$

άρα $f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = 2c$ for $0 \le z < 1$



Σχήμα