Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τ.Ε.Υ.
ΗΥ217 5η Σειρά Ασκήσεων
Παράδοση 20-12-02

1. Ασκηση 1 (Signal Classification)...
   Ενα τηλεπικοινωνιακό σύστημα αποτελείται από μια πηγή πληροφορίας, ένα κανάλι μετάδοσης και ένα δέκτη. Θεωρείστε μια πηγή πληροφορίας που παράγει ένα εκ τριών συμβόλων με την ίδια πιθανότητα. Στη συνέχεια,το κανάλι εισάγει θόρυβο παραμορφώνοντας το σήμα που έχει επιλεγεί για την αποστολή του εκάστοτε συμβόλου. Ετσι, ο δέκτης λαμβάνει την τιμή $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{N}$, όπου $\mathbf{X}$ η τιμή που στάλθηκε, $\mathbf{N}$ τυχαία μεταβλητή που παριστάνει προσθετικό θόρυβο με κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $\sigma^2 = 4$.

   (a) Υποθέστε ότι ο πομπός κωδικοποιεί τα 3 σύμβολα ως -1, 0 ,1. Στον δέκτη το λαμβανόμενο μήνυμα αποκωδικοποιείται ως εξής:
   - Αν $\mathbf{Y} > \frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο 1.
   - Αν $\mathbf{Y} < -\frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο -1.
   - Αν $-\frac{1}{2} \leq \mathbf{Y} \leq \frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο 0.

   Καθορίστε την πιθανότητα λάθους για το παραπάνω σχήμα κωδικοποίησης/αποκωδικοποίησης.

   (b) Σε μια προσπάθεια να μειωθεί η πιθανότητα λάθους, οι ακόλουθες τροποποιήσεις γίνονται. Ο πομπός κωδικοποιεί τους 3 τύπους μηνυμάτων με τιμές -2, 0 και 2, ενώ ο δέκτης αποκωδικοποιεί ως εξής:
   - Αν $\mathbf{Y} > \frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο 2.
   - Αν $\mathbf{Y} < -\frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο -2.
   - Αν $-\frac{1}{2} \leq \mathbf{Y} \leq \frac{1}{2}$, τότε αποκωδικοποιεί στο 0.

   Επαναλάβατε το βήμα (a) για αυτό το σχήμα κωδικοποίησης/αποκωδικοποίησης. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.

2. Ασκηση 2...
   Η τυχαία μεταβλητή $\mathbf{X}$ είναι εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο $\lambda_{\mathbf{X}} = 1$. Δηλαδή ορίζεται από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας(σ.π.π ή PDF) $f_X(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$. Δοθέντος ότι $X = x$ η τυχαία μεταβλητή $\mathbf{Y}$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda_Y = x$, δηλαδή η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (conditional PDF of Y given $X = x$) είναι:

   $$f_{Y|X}(y|x) = xe^{-xy}, y \geq 0$$

   (a) Με $\mathbf{A}$ συμβολίζουμε το γεγονός $X \geq 2$. Υπολογίστε την δεσμευμένη σ.π.π(conditional PDF) $f_{X|A}(x|A)$ και συγκρίνετε την με την περιθωριακή (uncoditional PDF) $f_X(x)$

   (b) Βρείτε την $f_{X,Y}(x,y)$, την από κοινού(joint PDF) συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των X και Y.

   (c) Βρείτε την $f_Y(y)$ περιθωριακή σ.π.π (marginal PDF) της Y.

3. Ασκηση 3...
Οι τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν την από κοινού σ.π.π(joint pdf)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & \text{if } 0 \le y < x \le 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Εστω A το γεγονός $\{\ X \ge 0.5\ \}$ και B το γεγονός $\{\ Y < 1 - X\ \}$. Συνίσταται να χρησιμοποιείσετε διαγράμματα για να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις.

   (a) Είναι οι X και Y ανεξάρτητες; Εξηγείστε.
   (b) Υπολογίστε την τιμή του c.
   (c) Υπολογίστε την $P(B|A)$.
   (d) Υπολογίστε την $\mathbf{E[XY]}$.

4. Ασκηση 4...
Εστω X και Y 2 ανεξάρτητες όμοια κατανεμημένες(**IID**)γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 0 και διασπορά σ^2.

   (a) Βρείτε την σ.π.π της $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ (η R λέγεται ότι ακολουθεί την κατανομή Rayleigh).
   (b) Βρείτε την ροπογεννήτρια της R (transform of R).

5. Ασκηση 5...
Για μια δοσμένη τυχαία μεταβλητή X ορίστε την τυχαία μεταβλητή Y ως: $Y = \alpha X^2 + b$.

   (a) Βρείτε την σ.π.π της Y συναρτήσει της σ.π.π της X,του α και του b.
   (b) Εστω X μια κανονική(γκαουσιανή) τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0 και διασπορά σ^2. Βρείτε την σ.π.π της $Y = X^2$, και την ροπογεννήτρια συνάρτηση. (H Y λέγεται ότι ακολουθεί την κεντρική χ-square κατανομή).

6. Ασκηση 6...
H τυχαία μεταβλητή **X** είναι εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο $\lambda_{\mathbf{X}} = 1$. Δηλαδή ορίζεται από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας(PDF)
$f_X(x) = e^{-x}$, $x \ge 0$

   (a) Παράγετε την σ.π.π της $f_Z(z)$ όπου $Z = e^{3X}$
   (b) Οι τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν την από κοινού σ.π.π(joint pdf)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & \text{if } 0 \le y < x \le 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

   Να παραχθεί η σ.π.π $f_Z(z)$ όπου $Z = \frac{Y}{X}$.