

ΗΥ-217 Λύσεις Τέταρτης σειράς ασκήσεων

6 Δεκεμβρίου 2002

1 Άσκηση

(α) Η από κοινού πυκνότητα των $X_1, X_2, \dots, X_r$ δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} p_{X_1, \dots, X_r}(x_1, \dots, x_r) &= \frac{(2r)!}{x_1! \cdots x_r!} \left(\frac{1}{r}\right)^{x_1} \cdots \left(\frac{1}{r}\right)^{x_r} \\ &= \frac{(2r)!}{x_1! \cdots x_r!} \left(\frac{1}{r}\right)^{2r} \end{aligned}$$

αν $0 \leq x_i \leq 2r, \sum x_i = 2r$

και $p_{X_1, \dots, X_r}(x_1, \dots, x_r) = 0$, αλλιώς. (η p ακολουθεί πολυωνυμική κατανομή).

(β)

$$P(X_1 = 2, \dots, X_r = 2) = \frac{(2r)!}{(2!)^r} \left(\frac{1}{r}\right)^{2r} = \frac{(2r)!}{(2r^2)^r}$$

2 Άσκηση

Η πιθανότητα που ζητάμε είναι:

$$\sum_{k=0}^2 \binom{50}{k} (0.05)^k (0.95)^{50-k}.$$

Εκτελούμε 50 ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p = 0.05$. Θεωρούμε επιτυχία το γεγονός ότι το άτομο έχει πλαστή άδεια οδήγησης. Ζητάμε την πιθανότητα το πλήθος των επιτυχιών να είναι το πολύ ίσο με 2.

Επειδή το πλήθος των δοκιμών είναι 'μεγάλο' και η πιθανότητα επιτυχίας 'μικρή', μπορούμε να προσεγγίσουμε τη διωνυμική κατανομή $(50, 0.05)$ με την κατανομή Poisson παραμέτρου $\lambda = 50 \cdot (0.05) = 2.5$. Δηλ.

$$P \simeq \sum_{k=0}^2 \frac{e^{-2.5} (2.5)^k}{k!} = e^{-2.5} \left(1 + 2.5 + \frac{6.25}{2}\right) = 6.625 \cdot e^{-2.5}$$

3 Άσκηση

(α)

$$\begin{aligned}
 P(X + Y = k) &= \sum_{s=0}^k P(Y = s, X + Y = k) = \sum_{s=0}^k P(Y = s)P(X = k - s) \\
 &= \sum_{s=0}^k \frac{e^{-\mu} \mu^s}{s!} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k-s}}{(k-s)!} = \frac{e^{-(\mu+\lambda)}}{k!} \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} \mu^s \lambda^{k-s} \\
 &= \frac{e^{-(\mu+\lambda)}}{k!} (\mu + \lambda)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

άρα, η $X+Y$ ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda + \mu$.

(β)

$$\begin{aligned}
 P(X = k | Z = n) &= P(X = k | X + Y = n) = \frac{P(X = k, X + Y = n)}{P(X + Y = n)} \\
 &= \frac{P(X = k)P(Y = n - k)}{P(X + Y = n)}
 \end{aligned}$$

Αν $n \geq k$, αυτό ισούται με:

$$\frac{\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \frac{e^{-\mu} \mu^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{e^{-(\lambda+\mu)} (\lambda+\mu)^n}{n!}} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{n-k}.$$

Αν $n < k$, τότε:

$$P(X = k | Z = n) = 0.$$

4 Άσκηση

(i)

$$\begin{aligned}
 P(X \geq Y) &= P\left(\bigcup_{k=0}^N \{Y = k, X \geq Y\}\right) = \sum_{k=0}^N P(Y = k, X \geq Y) \\
 &= \sum_{k=0}^N P(Y = k, X \geq k) = \sum_{k=0}^N P(Y = k)P(X \geq k) \\
 &= \sum_{k=0}^N \frac{1}{N+1} \frac{N+1-k}{N+1} = \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{k=0}^N (N+1-k) \\
 &= \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{s=1}^{N+1} s = \frac{1}{(N+1)^2} \frac{(N+1)(N+2)}{2} = \frac{N+2}{2(N+1)}.
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{s=0}^N P(X = s, Y = s) = \sum_{s=0}^N P(X = s)P(Y = s) \\ &= \sum_{s=0}^N \frac{1}{(N+1)^2} = \frac{1}{N+1}. \end{aligned}$$

5 Άσκηση

(i)

$$\begin{aligned} E\{Y\} &= \sum_y y P(Y = y) = \sum_y y \sum_{n=1}^{\infty} P(Y = y, N = n) \\ &= \sum_y y \sum_{n=1}^{\infty} P(X_1 + \cdots + X_n = y, N = n) \\ &= \sum_y y \sum_{n=1}^{\infty} P(X_1 + \cdots + X_n = y) P(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) \sum_y y P(X_1 + \cdots + X_n = y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) E\{X_1 + \cdots + X_n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) \sum_{i=1}^n E\{X_i\} = \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) n \mu \\ &= \mu \sum_{n=1}^{\infty} n P(N = n) = \mu E\{N\}. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} E\{Y^2\} &= \sum_y y^2 P(Y = y) = \sum_y y^2 \sum_{n=1}^{\infty} P(Y = y, N = n) \\ &= \sum_y y^2 \sum_{n=1}^{\infty} P(X_1 + \cdots + X_n = y, N = n) \\ &= \sum_y y^2 \sum_{n=1}^{\infty} P(X_1 + \cdots + X_n = y) P(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) \sum_y y^2 P(X_1 + \cdots + X_n = y) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) E\{(X_1 + \cdots + X_n)^2\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) \{Var(X_1 + \cdots + X_n) + (E\{X_1 + \cdots + X_n\})^2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) \left\{ \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + (n\mu)^2 \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) \{n\sigma^2 + n^2\mu^2\} \\
&= \sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} n P(N=n) + \mu^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P(N=n) = \sigma^2 E\{N\} + \mu^2 E\{N^2\}.
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Y) &= E\{Y^2\} - (E\{Y\})^2 = \sigma^2 E\{N\} + \mu^2 E\{N^2\} - (\mu E\{N\})^2 \\
&= \sigma^2 E\{N\} + \mu^2 (E\{N^2\} - (E\{N\})^2) = \sigma^2 E\{N\} + \mu^2 \text{Var}(N).
\end{aligned}$$

6 Άσκηση

Δυνατές τιμές της S : $0, 1, \dots, n$.

$$E\{S\} = \sum_{k=0}^n k P(S=k),$$

όπου $S = k$ ακριβώς k συμπτώσεις.

Γράφουμε την S σαν άθροισμα απλών τυχαίων μεταβλητών. Ορίζουμε

$X_i = 1$, αν έχουμε σύμπτωση στην i -θέση και

$X_i = 0$, αλλιώς.

Τότε $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n =$ πλήθος των συμπτώσεων.

Όμως, $E\{X_i\} = P(X_i = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$, άρα

$E\{S\} = n E\{X_1\} = n \frac{1}{n} = 1$.

7 Άσκηση

Γράφουμε την X σαν άθροισμα. Για $i = 1, 2, \dots, 365$, ορίζουμε

$X_i = 1$, ακριβώς κ άτομα έχουν γενέθλια την i -μέρα,

$X_i = 0$, αλλιώς.

Τότε $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{365}$.

$E\{X_i\} = P(\text{ακριβώς } \kappa \text{ από τα } n \text{ άτομα έχουν γενέθλια την } i\text{-μέρα}) =$

$\binom{n}{\kappa} \left(\frac{1}{365}\right)^\kappa \left(\frac{364}{365}\right)^{n-\kappa}$, (παίρνουμε κάθε άτομο σαν δοκιμή Bernoulli με πιθα-

νότητα επιτυχίας $\frac{1}{365}$ να γεννηθήκε την i -μέρα και ζητάμε σε n δοκιμές να έχουμε ακριβώς κ επιτυχίες.

Άρα $E\{X\} = 365 \binom{n}{\kappa} \left(\frac{1}{365}\right)^\kappa \left(\frac{364}{365}\right)^{n-\kappa}$.