

ΗΥ-217 Τέταρτη σειρά ασκήσεων

22 Νοεμβρίου 2002

Ημερομηνία παράδοσης 29-11-02

1 Άσκηση

Υποθέτουμε ότι $2r$ μπάλες κατανέμονται τυχαία σε r κουτιά. Με X_i συμβολίζουμε το πλήθος των μπαλών στο κουτί i .

(α) Βρείτε την από κοινού πυκνότητα των $X_1, \dots, X_r$.

(β) Βρείτε την πιθανότητα κάθε κουτί να περιέχει ακριβώς 2 μπάλες.

2 Άσκηση

Το 5% των οδηγών έχουν πλαστή άδεια οδήγησης. Χρησιμοποιήστε την προσέγγιση Poisson για να υπολογίσετε την πιθανότητα το πολύ 2 σε ένα δείγμα 50 ατόμων να έχουν πλαστή άδεια οδήγησης.

3 Άσκηση

Έστω X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές Poisson. Δείξτε ότι η $Z = X + Y$ έχει πυκνότητα Poisson (αν λ, μ οι παράμετροι των X, Y βρείτε την παράμετρο ν της Z). Υπολογίστε την $P(X = k | Z = n)$.

4 Άσκηση

Έστω X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που έχουν ομοιόμορφη πυκνότητα στο $\{0, 1, \dots, N\}$. Βρείτε τις: (i) $P(X \geq Y)$, (ii) $P(X = Y)$.

5 Άσκηση

Έστω $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που έχουν την ίδια πεπερασμένη μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 . Έστω N μια τυχαία μεταβλητή που

παίρνει ακέραιες μη αρνητικές τιμές, είναι ανεξάρτητη από τις X_i , και έχει πεπερασμένη μέση τιμή και διασπορά. Ορίζουμε $Y = X_1 + \dots + X_N$. Δείξτε ότι:

$$(i) E\{Y\} = \mu E\{N\}, (ii) E\{Y^2\} = \sigma^2 E\{N\} + \mu^2 E\{N^2\} (iii) VarY = \sigma^2 E\{N\} + \mu^2 VarN.$$

6 Άσκηση

Έχουμε δύο δεσμίδες των χαρτιών $1, 2, \dots, n$. Τις ανακατεύουμε και φέρνουμε τα χαρτιά τους σε $1 - 1$ αντιστοιχία. Έχουμε σύμπτωση στην i -θέση, αν το i -χαρτί της 1ης και της 2ης δεσμίδας φέρουν τον ίδιο αριθμό. S = το πλήθος των συμπτώσεων. Βρείτε την $E\{S\}$.

7 Άσκηση

Έχουμε μια ομάδα n ατόμων. X = το πλήθος των ημερών του χρόνου στις οποίες ακριβώς x άτομα της ομάδας έχουν γενέθλια. Βρείτε την $E\{X\}$