ΗΥ-217 Τρίτη σειρά ασκήσεων

18 Νοεμβρίου 2002

Ημερομηνία παράδοσης 15-11-02

1 Άσκηση

Για να έρθει άθροισμα 11 πρέπει να έρθουν οι παρακάτω συνδιασμοί
$(6,4,1)(6,3,2)(5,5,1)(5,4,2)(5,3,3)(4,4,3)$
Για να έρθει άθροισμα 12 πρέπει έρθουν οι παρακάτω συνδιασμοί
$(6,5,1)(6,4,2)(6,3,3)(5,5,2)(5,4,3)(4,4,4)$
Γενικά, οι δυνατοί συνδιασμοί για μια τριάδα με διαφορετικά στοιχεία είναι $3! = 6$. Στην περίπτωση όμως που μια τριάδα έχει κάποια στοιχεία ίδια (για παράδειγμα $(5,5,3)$) τότε οι δυνατοί συνδιασμοί είναι τρείς.Άρα συνολικά έχουμε $6+6+3+6+3+3 = 27$ συνδιασμούς.
Όμοια στην περίπτωση που ζητάμε να έρθει άθροισμα 12, έχουμε $6+6+3+3+6+1 = 25$ συνδιασμοί.
Ο δειγματικός χώρος είναι $6^3 = 216$ στοιχεία, άρα η πιθανότητα να έρθει άθροισμα 11 είναι $P(11) = 27/216$, και η πιθανότητα να έρθει άθροισμα 12
$P(12) = 25/216$.

2 Άσκηση

Πρώτα θα υπολογίσουμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε τους 8 πύργους ώστε αυτοί να είναι ασφαλείς, και έπειτα θα διαιρέσουμε με το πλήθος των δυνατών ενδεχομένων.θα τους τοποθετήσουμε τον έναν μετά τον άλλο στην σκακιέρα 8×8.Για τον πρώτο πύργο δεν υπάρχει περιορισμός, άρα έχουμε 64 επιλογές.Αφού τοποθετήσουμε τον πρώτο πύργο, αυτόματα μια στήλη και μια γραμμή ¨εξοντώνεται¨.Έτσι είναι σαν να έχω μια σκακιέρα 7×7, και τότε θα έχουμε 49 επιλογές. Όμοια, για τον τρίτο πύργο μένουν 36 επιλογές, για τον τέταρτο 25, κ.ο.κ. Άρα με $64 \times 63 \times \ldots 57 = 64!/56!$ τρόπους μπορώ να τοποθετήσω 8 πύργους. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$p = \frac{64 \times 49 \times 36 \times 25 \times 16 \times 9 \times 4}{\frac{64!}{56!}} \tag{1}$$

3 Άσκηση

(α) Ο αρχηγός της ομάδας μπορεί να επιλεγεί με n τρόπους. Μένουν $n-1$ άτομα από τα οποία μπορούμε να επιλέξουμε 2^{n-1} ομάδες. Άρα ο αριθμός όλων των δυνατών ομάδων είναι $n2^{n-1}$.
(β) Μπορούμε να επιλέξουμε μια ομάδα k ατόμων από τα n με $\binom{n}{k}$ τρόπους. Συνολικά μπορώ να φτιάξω k $\binom{n}{k}$ ομάδες των k. Επομένως για όλα τα k έχω

$$\sum_{k=1}^{n} k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = n2^{n-1}$$

4 Άσκηση

(α) Ο δειγματικός χώρος είναι $\binom{52}{7}$ (με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 7 στοιχεία από ένα σύνολο με 52 στοιχεία). Ζητάμε τα 7 χαρτιά περιέχουν ακριβώς 3 άσσους. Μπορούμε να διαλέξουμε 3 οποιουσδήποτε από τους 4 άσσους και 4 οποιασδήποτε από 48 χαρτιά. Συνολικά, έχουμε $\binom{4}{3}$ $\binom{48}{4}$ επιλογές. Άρα η πιθανότητα που ζητάμε είναι
$\binom{4}{3}$ $\binom{48}{4}$ / $\binom{52}{7}$.
(β) Όμοια με το (α) η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\binom{4}{2}$ $\binom{48}{5}$ / $\binom{52}{7}$.
(γ) Έστω A και B τα ενδεχόμενα του (α) και (β) αντίστοιχα. Ζητάμε την πιθανότητα

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{2}$$

Το ενδεχόμενο A∪ B, (να έχω ακριβώς 3 άσσους και 2 ντάμες) μπορεί να γίνει διαλέγοντας 3 από τους 4 άσσους,2 από τις 4 ντάμες και 2 χαρτιά από τα υπόλοιπα 44. Το ζητούμενο ενδεχόμενο μπορεί να γίνει με $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{44}{2}$ διαφορετικούς τρόπους. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι
($\binom{4}{3}$ $\binom{48}{4}$ + $\binom{4}{2}$ $\binom{48}{5}$ - $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{44}{2}$) / $\binom{52}{7}$.

5 Άσκηση

Ισχύει ότι

$$P(X=k)=\frac{1}{k_2-k_1+1}$$

όπου k ανήκει στο σύνολο των ακέραιων τιμών στο διάστημα (k_1, k_2).
Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}
&P(max(0,X)=t)\\
&\qquad = P(\{0=t, X\le 0\}\cup\{X=t, 0<X\})\\
&\qquad = P(0=t, X\le 0)+P(X=t, 0<X)\\
&\qquad = P(0=t, X\le t)+P(X=t, 0<t)
\end{aligned}$$

Παίρνουμε περιπτώσεις για το t
Αν το t ανήκει στους θετικούς ακέραιους του διαστήματος (k_1, k_2) είναι

$$P(0=t, X\le t)=0$$

Άρα

$$P(max(0,X)=t)=P(X=t)=\frac{1}{k_2-k_1+1}$$

Αν το t ανήκει στους αρνητικούς ακέραιους του διαστήματος (k_1, k_2) είναι

$$P(max(0,X)=t)=0$$

και στην περίπτωση που $t=0$

$$P(X=t, 0\le t)=0$$

Άρα

$$\begin{aligned}
&P(max(0,X)=t)=P(X\le t)\\
&\qquad = \sum_{s=k_1}^{0}\frac{1}{k_2-k_1+1}=\frac{1}{k_2-k_1+1}\sum_{s=k_1}^{0}1\\
&\qquad = \frac{1-k_1}{k_2-k_1+1}
\end{aligned}$$

Όμοια έχουμε

$$\begin{aligned}
&P(min(0,X)=t)\\
&\qquad = P(\{0=t, 0\le X\}\cup\{X=t, X<0\})\\
&\qquad = P(0=t, 0\le X)+P(X=t, X<0)\\
&\qquad = P(0=t, t\le X)+P(X=t, t<0)
\end{aligned}$$

Παίρνουμε περιπτώσεις για το t
Αν το t ανήκει στους θετικούς ακέραιους του διαστήματος (k_1, k_2) είναι

$$P(min(0,X)=t)=0$$

Αν το t ανήκει στους αρνητικούς ακέραιους του διαστήματος (k_1, k_2) είναι

$$P(min(0,X)=t)=P(X=t)=\frac{1}{k_2-k_1+1}$$

και στην περίπτωση που $t=0$

$$\begin{aligned} P(min(0,X)=t) & \\ &= P(X \geq t) = P(X > t-1) \\ &= 1 - P(X \leq t-1) \\ &= 1 - \sum_{k_1}^{[t-1]} \frac{1}{k_2-k_1+1} \\ &= 1 - \sum_{k_1}^{-1} \frac{1}{k_2-k_1+1} \\ &= 1 - \frac{-1-k_1+1}{k_2-k_1+1} \\ &= \frac{k_2+1}{k_2-k_1+1} \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} P(min(0,X)=t) & \\ &= P(X \leq t) \\ &= \sum_{s=k_1}^{0} \frac{1}{k_2-k_1+1} \\ &= \frac{1}{k_2-k_1+1} \sum_{s=k_1}^{0} 1 \\ &= \frac{1-k_1}{k_2-k_1+1} \end{aligned}$$

6 Άσκηση

Ο αριθμός των λαθών είναι μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή n(1-p) όπου n=10.000.Το ζητούμενο είναι ο μέσος όρος των τιμών δηλαδή η μέση τιμή της μεταβλητής να είναι το πολύ 10. Επομένως θέλουμε

$$n(1-p) < 10, 10000(1-p) < 10, 1-p < 0.001, p > 0.999 \qquad (3)$$

7 Άσκηση

Ο δειγματικός χώρος αποτελείτε από τετράδες με Κ και Γ και περιέχει $2^4 = 16$ στοιχεία. Οι Χ,Υ παίρνουν τιμές {0,1,2,3,4} Πιο αναλυτικά θα αποδειχθούν μερικά παραδείγματα.
Η πιθανότητα να μην φέρω την πρώτη φορά Κ και να μην φέρω καμια φορά Κ, δηλαδή (0,0) είναι 1/16.
Η πιθανότητα να πρωτοεμφανιστεί Κ την δεύτερη φορά και να φέρω Κ δυο φορές, δηλαδή (2,2) είναι 2/16 .
Η πιθανότητα να πρωτοεμφανιστεί Κ την πρώτη φορά και να φέρω τρεις φορές Κ, δηλαδή (1,3) είναι 3/16,κ.ο.κ
Διαγραμματικά έχουμε

Y|X	0	1	2	3	4
0|	1/16	0	0	0	0
1|	0	1/16	1/16	1/16	1/16
2|	0	3/16	2/16	1/16	0
3|	0	3/16	1/16	0	0
4|	0	1/16	0	0	0

Οι περιθωριακές συναρτήσεις δίνονται από τους τύπους

$$P_X(x) = \sum_{y=0}^{4} P_{XY}(x,y)$$
$$P_Y(y) = \sum_{x=0}^{4} P_{XY}(x,y)$$

δηλαδή

$$P_X(0) = 1/16, P_X(1) = 8/16, P_X(2) = 4/16, P_X(3) = 2/16, P_X(4) = 1/16$$
$$P_Y(0) = 1/16, P_Y(1) = 4/16, P_Y(2) = 6/16, P_Y(3) = 4/16, P_Y(4) = 1/16$$