ΗΥ-217 Λύσεις δεύτερης σειράς ασκήσεων

29 Οκτωβρίου 2002

Ημερομηνία παράδοσης 25-10-02

1 Άσκηση

Έστω A το ενδεχόμενο η παρτίδα να είναι αποδεκτή. Τότε
$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ όπου A_i, i = 1,...4 είναι το ενδεχόμενο η ιοστή λάμπα να μην είναι ελαττωματική. Τότε, σύμφωνα με τον πολλαπλασιαστικό κανόνα έχουμε,
$P(A) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3$

$= \frac{95}{100}\frac{94}{99}\frac{93}{98}\frac{92}{97} = 0.812$

2 Άσκηση

Έστω p_i η πιθανότητα να διαλέξαμε λευκή μπάλα από το ιοστό δοχείο, τότε από το ολικό θεώρημα έχουμε την σχέση

$p_{i+1}= \frac{m+1}{m+n+1}p_i + \frac{m}{m+n+1}(1 - p_i)$

$= \frac{1}{m+n+1}p_i + \frac{m}{m+n+1}$, με $p_1 = \frac{m}{m+n}$.

Άρα $p_1 = \frac{1}{m+n+1}\frac{m}{m+n} + \frac{m}{m+n+1}= \frac{m}{m+n}$.

Άρα δείξαμε με τον υπολογισμό αυτό ότι αν $p_{i-1} = \frac{m}{m+n}$ τότε και $p_i = \frac{m}{m+n}$.
Επομένως δείξαμε το ζητούμενο, αφού $p_i = \frac{m}{m+n}$ για κάθε i.

3 Άσκηση

Έστω $p_{i,n-i}(k)$ η πιθανότητα μετά από k εναλλαγές ένα δοχείο θα περιέχει i μπάλες που ξεκίνησαν από το δοχείο αυτό και $n - i$ μπάλες που ξεκίνησαν από το άλλο δοχείο. Ζητάμε την πιθανότητα $p_{n,0}(4)$.Σύμφωνα με το ολικό θεώρημα έχουμε ότι

$p_{n,0}(4) = \frac{1}{n}\frac{1}{n}p_{n-1,1}(3)$

$p_{n-1,1}(3) = p_{n,0}(2) + 2\frac{n-1}{n}\frac{1}{n}p_{n-1,1}(2) + \frac{2}{n}\frac{2}{n}p_{n-2,2}(2)$

$p_{n,0}(2) = \frac{1}{n}\frac{1}{n}p_{n-1,1}(1)$

$p_{n-1,1}(2) = 2\ \frac{n-1}{n}\frac{1}{n}p_{n-1,1}(1)$

$p_{n-2,2}(2) = \frac{n-1}{n}\frac{n-1}{n}p_{n-1,1}(1)$

$p_{n-1,1}(1) = 1$

Συνδιάζοντας τις παραπάνω ισότητες έχουμε ότι

$p_{n,0}(4) = \frac{1}{n^2}(\frac{1}{n^2} + \frac{4(n-1)^2}{n^4} + \frac{4(n-1)^2}{n^4}) = \frac{1}{n^2}(\frac{1}{n^2} + \frac{8(n-1)^2}{n^4})$

4 Άσκηση

(α) Έχουμε ότι

P(A|B) $= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Άρα το ενδεχνόμενο B *υποδεικνύει* το A αν και μόνο αν P(A $\cap$ B) $>$ P(A) P(B) όπου από συμμετρία έχουμε ότι A *υποδεικνύει* το B.

(β) Εφόσον $P(B) + P(B^c) = 1$ έχουμε ότι

$P(B)P(A) + P(B^c)P(A) = P(A) =$ P(B) P(A|B) + P(B^c) P(A|B^c)

Συνεπάγεται λοιπόν ότι

P(B^c) (P(A) - P(A|B^c)) = P(B) (P(A|B)- P(A))

Επομένως P(A|B) $>$ P(A) (δηλαδή B *υποδεικνύει* το A αν και μόνο αν P(A) $>$ P(A|B^c) (δηλαδή B^c *δεν υποδεικνύει* το A) .

(γ) Έστω A και B τα ενδεχόμενα
A = {ο θησαυρός να είναι στο δεύτερο μέρος}.
B = {δεν βρίσκουμε τον θησαυρό στο πρώτο μέρος}.

Σύμφωνα με το ολικό θεώρημα έχουμε
P(B) =P(A^c) P(B|A^c) + P(A) P(B|A) = β(1-β) + (1-β).

5 Άσκηση

Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
P(C \mid B)P(A \mid B \cap C) \quad &+ \quad P(C^c \mid B)P(A \mid B \cap C^c) \\
&= \frac{P(B \cap C)}{P(B)} \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} + \frac{P(B \cap C^c)}{P(B)} \frac{P(A \cap B \cap C^c)}{P(B \cap C^c)} \\
&= \frac{P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C^c)}{P(B)} \frac{P((A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c))}{P(B)} \\
&= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\
&= P(A \mid B).
\end{aligned}
$$

6 Άσκηση

θεωρείστε τον δειγματικό χώρο της στρατηγικής του κυνηγού.Τα ενδεχόμενα που τον οδηγούν στο σωστό μονοπάτι είναι
(1) Και τα δύο σκυλιά συμφωνούν και επιλέγουν το σωστό μονοπάτι (με πιθανότητα p^2.
(2) Τα σκυλια διαφωνούν.Το σκυλί 1 επιλέγει το σωστό μονοπάτι και ο κυνηγός το ακολουθεί (πιθανότητα $p(1-p)/2$).
(3) Τα σκυλια διαφωνούν.Το σκυλί 2 επιλέγει το σωστό μονοπάτι και ο κυνηγός το ακολουθεί (πιθανότητα $p(1-p)/2$).
Τα παραπάνω ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα, άρα μπορούμε να προσθέσουμε τις πιθανότητες για να βρούμε την πιθανότητα να επιλέξει το σωστό μονοπάτι, δηλαδή

$p^2 + \frac{p(1-p)}{2} + \frac{p(1-p)}{2} = p.$

Εάν ο κυνηγός αποφασίσει να αφήσει κάποιο σκυλί να επιλέξει ένα μονοπάτι, τότε το σκυλί θα επιλέξει το σωστό μονοπάτι με (πιθανότητα p). Επομένως και οι δύο μέθοδοι είναι εξίσου αποτελεσματικοί.

7 Άσκηση

Έστω ότι οι γονείς του βασιλιά αποφάσισαν να κάνουν ακριβώς δύο παιδιά και μετά να σταματήσουν. Υπάρχουν τέσσερα ισοπίθανα ενδεχόμενα ΑΑ,ΚΚ,ΑΚ,ΚΑ (όπου Α αγόρι και Κ κορίτσι). Δεδομένου ότι τουλάχιστον ένα παιδί είναι αγόρι (ο βασιλιάς) το ενδεχόμενο ΚΚ δεν θα γίνει ποτέ (έχει πιθανότητα μηδέν). Άρα έχουμε τα εξείς ενδεχόμενα ΑΑ,ΑΚ,ΚΑ. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι 1/3.
Εάν υποθέσουμε ότι οι γονείς του βασιλιά αποφάσισαν να κάνουν παιδιά μέχρι να κάνουν αγόρι, τότε ο βασιλιάς είναι το δεύτερο παιδί άρα το αδέρφι είναι αρσενικό με βεβαιότητα (δηλαδή πιθανότητα ίση με ένα).

8 Άσκηση

(α) Έστω Α το ενδεχόμενο η πόλη να έχει black-out.Αφού κάθε μονάδα αποτυγχάνει το σκοπό της ανεξάρτητα από τις άλλες έχουμε ότι

$$P(A) = p^n \tag{1}$$

(β) Στην περίπτωση αυτή black-out θα έχουμε όταν είτε n μονάδες αποτύχουν είτε $n-1$ μονάδες αποτύχουν. Τα ενδεχόμενα αυτά είναι ανεξάρτητα άρα αν Α το ενδεχόμενο η πόλη να έχει black-out,τότε

$$P(A) = p^n + n(1-p)p^{n-1} \tag{2}$$

9 Άσκηση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(A \cap B \mid C) &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A)P(B)P(C)}{P(C)} \\ &= P(A)P(B) \\ &= P(A \mid C)P(B \mid C) \end{aligned}$$

10 Άσκηση

Έχουμε ότι

$$P(A_1 \mid A_3 \cap A_4) = \frac{P(A_1 \cap A_3 \cap A_4)}{P(A_3 \cap A_4)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{P(A_1)P(A_3)P(A_4)}{P(A_3)P(A_4)} \\
&= P(A_1)
\end{aligned}
$$

Όμοια έχουμε ότι

$$P(A_2 \mid A_3 \cap A_4) = P(A_2) \tag{3}$$

και

$$P(A_1 \cap A_2 \mid A_3 \cap A_4) = P(A_1 \cap A_2) \tag{4}$$

και τελικά

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \mid A_3 \cap A_4) &= P(A_1 \mid A_3 \cap A_4) + P(A_2 \mid A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \mid A_3 \cap A_4 \\
&= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\
&= P(A_1 \cup A_2).
\end{aligned}
$$